scientia et fidelitate

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Bölcsészet- és Társadalomtudományi Kar

Hankovszky Tamás

Elsőrendű logika

egyetemi jegyzet

ISBN 978-963-308-206-5

Budapest, 2014.

Hankovszky Tamás

Elsőrendű logika

Segédlet Ruzsa Imre *Bevezetés a modern logikába* című könyvéhez

ISBN 978-963-308-206-5

E jegyzet célja, hogy segítse a szimbolikus logika alapjait már ismerő hallgatókat Ruzsa Imre *Bevezetés a modern logikába* című alapvető könyvének feldolgozásában. Ezt az évtizedeken keresztül tökéletesített kompendiumot ugyanis meglehetősen nagyvonalú tárgyalásmód jellemzi, és inkább a szakembernek, mint a hallgatónak szól. A logikával épp csak ismerkedők számára hasznos olyan kiegészítéseket, magyarázatokat rendelni hozzá, amelyekkel e bizonyára sokáig felülmúlhatatlan magyar nyelvű munka számukra is befogadhatóvá válik. A következő oldalak, bár remélhetőleg önmagukban is érthetőek, szorosan Ruzsa művéhez kapcsolódnak, és azzal együtt olvasandók. Megadják a formulái kiolvasását, részletesen elmagyarázzák a tételei jelentését, bemutatják a levezetések közbülső, a könyvben nem szereplő lépéseit. A tananyag megértésének elmélyítését és a továbbgondolást kérdések és feladatok szolgálják. A jegyzetben „Tankönyv"-ként hivatkozott műnek két kiadása van. (Ruzsa Imre – Máté András: *Bevezetés a modern logikába*. Budapest, Osiris, 1997. és Ruzsa Imre: *Bevezetés a modern logikába*. Budapest, Osiris, 2000.) A feldolgozott fejezetek mindkét kiadásban a 121-154. oldalon találhatók.

Tartalom

1. Elsőrendű nyelvek és szemantikájuk

(Tankönyv 121-125. oldal)

Klasszikus *elsőrendű nyelv*en a **KL**, vagyis a klasszikus elsőrendű logika (ahol csak individuumváltozók kvantifikálhatók) formalizált nyelvét étjük. Egy formalizált nyelv szigorúan meghatározott grammatika szerint épül fel. Ez megadja a nyelvi elemek (szimbólumok) egymáshoz kapcsolásának szabályait, és így a jólképzett kifejezések osztálya is egyértelműen rögzített. A formalizált nyelvekben a természetes nyelvi kifejezések helyét szimbólumok foglalják el, ami megkönnyíti a szigorú grammatika alkalmazását. (Például a (p & q) esetében a & jel használatának szabályai egyértelműen rögzítettek, egyértelműbben, mint az „és” szóé.)

I. A klasszikus elsőrendű nyelvek grammatikája

A grammatika két részre osztható: szótárra és nyelvtani szabályokra

A szótár: a primitív kifejezések listája

1. Logikai konstansok (*Log*): (,), $\sim$, &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $=$, $\forall$, $\exists$,

2. Kvantifikálható változók (*Var*): x_1, x_2, x_n (Használatos erre a célra az x, y, z sorozat is.)

3. Nemlogikai vagy deskriptív konstansok (*Con*): nevek, névfunktorok, predikátumok, mondatok természetes nyelvi formájukban vagy paraméterként, pl. a, b, c, F, G, p, q. A mondatparaméterek helyett használhatunk nulla argumentumú predikátumokat is.

Külön, az előzőeket átfedő csoportba sorolhatjuk a terminusokat. *Term*: A változók és a névkonstansok együtt. A terminusok osztályába tehát olyan elemek tartoznak, amelyeket az előző osztályokban is felsoroltunk. Külön osztályként való számontartásuknak technikai jelentősége lesz.

Nyelvtani szabályok: megadják, hogy a primitív kifejezéseket hogyan kell egymáshoz kapcsolni annak érdekében, hogy jólformált összetett kifejezéseket kapjunk. Céljuk tehát a formula fogalmának szabatos meghatározása. A formula fogalmát induktív definícióval rögzítjük.

Induktív definíció: valamilyen osztály meghatározására szolgál. Három része van:

a) *Bázis*: Megadja a definiálandó osztály egy részosztályát, és rögzíti, hogy ez része a definiálandó osztálynak.

b) *Indukciós szabályok*: Megmondják, hogy ha valami az osztályba tartozik, mi minden tartozik még oda. (A bázis elemeiből kiindulva hogyan képzünk újabb tagokat az osztály számára. Az új tagokra ismét alkalmazhatjuk az indukciós szabályokat, így az osztály újabb elemeihez jutunk stb.)

c) *Záradék*: Kimondja, hogy csak a bázis és az indukciós szabályok által generált elemek tartoznak az osztályba.

Példa: A bibliai teremtéstörténetet alapul véve az embert így definiálhatjuk. Bázis: Ádám és Éva ember. Indukciós szabály: Ha x ember, és y gyermeke x-nek, akkor y is ember. Záradék: Más lények nem emberek.

A formula (induktív) definíciója

a) *Bázis*

(F1) *Ha* F n-argumentumú predikátum *és* t_1, … t_n terminusok, *akkor* $F(t_1)\ldots(t_n)$ atomi formula. (Ha $n = 0$, akkor F egy felbontatlanul hagyott mondat atomi formulája, ha $n \geq 1$, akkor egy predikátumra és argumentum(ai)ra bontott egyszerű mondat formulája.)

(F2) *Ha* t_1 és t_2 terminusok, akkor $(t_1 = t_2)$ atomi formula.

(F3) Az atomi formulák formulák.

b) *Indukciós szabályok*

(F4) *Ha* A és B formulák, *akkor* $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ is formulák.

(F5) *Ha* A formula, *akkor* $\sim A$ is formula.

(F6) *Ha* x változó *és* A formula, *akkor* $\forall xA$ és $\exists xA$ is formula.

c) *Záradék*

(F7) Más formula nincs.

Az elsőrendű nyelvek (L^1) primitív kifejezésekből (*Log*, *Var*, *Con*, *Term)* és a belőlük képzett összetettekből (*Form)* állnak. Azért beszélhetünk több elsőrendű nyelvről is, mert a nemlogikai konstansok és ebből következően a formulák osztálya eltérő lehet. Ha *Con* üres osztály, akkor a nyelvben nincsenek se predikátumok, se nevek, se mondatparaméterek, hanem csak a változók állnak rendelkezésre mint név-szerű dolgok, és csak egyetlen predikátum, a logikai konstansok között szereplő =. Ez nagyon redukált nyelvet eredményez.

II. Az elsőrendű nyelvek szemantikája

Legáltalánosabb fogalma szerint a **szemantika** a nyelvi elemek és a nyelven túli valóság közti viszonyt vizsgálja, és szemantikai értéket tulajdonít a kifejezéseknek. Extenzionális logikában ezek közül csak a faktuális értékekre vagyunk tekintettel. A szemantika ilyen meghatározása nem hordoz magában sajátos ontológiai elköteleződést, ha a „nyelven túli valóság" kifejezést kellően tág értelemben vesszük. Nem kell például ragaszkodnunk hozzá, hogy e „valóságban" (csak) meghatározott fajtájú (például fizikai) dolgok legyenek.

A. A nyelvi elemek és a valóság viszonyának, vagyis a faktuális érték megadásának eszköze és folyamata az interpretáció, illetve az értékelés.

B. Az interpretáció és az értékelés fogalmának tisztázása után a nyelvi elemek (*Log* kivételével) minden osztálya számára definiálhatunk faktuális értéket.

A.

A./a. Interpretáció

Az interpretációt *először* (Tankönyv 52. oldal) úgy határoztuk meg, hogy a logikailag elemzett mondatok (formulák) interpretálása azt jelenti, hogy faktuális értéket rendelünk a fel nem bontott kifejezések mindegyikéhez. Ez a nulladrendű elemzésre vonatkozó definíció volt, ahol a felbontatlan kifejezések mondatok (0-argumentumú predikátumok) voltak. Ezekhez kellett faktuális értéket (1 vagy 0) rendelni. Ezt a lépést ezután is interpretációnak fogjuk nevezni. *Később* (Tankönyv 73. oldal) az elsőrendű interpretálás fogalmával is megismerkedtünk, de még az előtt, hogy a változókat és a kvantorokat tekintetbe vehettük volna. Az interpretáció szabályait predikátumok, nevek és atomi mondatok (0-argumentumú predikátumok), vagyis a nemlogikai konstansoknak (*Con*) esetére kaptuk meg. (Ezek a szabályok tehát magukban foglalták a nulladrendű elemzéshez tartozó interpretációt is.) Az interpretációnak ezen a fogalmán most sem fogunk módosítani, csak egzaktabbul fogjuk kifejezni.

E szerint az interpretáció (*Ip*) olyan *függvény*, amely *Con* elemeihez faktuális értéket rendel. (Műveletként, folyamatként felfogva az interpretáció az az *aktus*, amikor *Con* elemeihez *Ip* függvény segítségével faktuális értéket rendelünk.)

→» Vajon miért nem tárgyai az interpretációnak *Log* és *Form* elemei is?

$$Ip = \langle U, \Phi \rangle$$

$\langle\ \rangle$ a rendezett *n*-esek megadására szolgáló zárójel.

U a tárgyalási univerzum: egy nemüres individuumtartomány.

Φ egy függvénykapcsolat, egyértelmű megfeleltetés, amely a *Con* minden eleméhez hozzárendel

A. vagy egy *u*-t, vagyis *U* egy elemét ($u \in U$),
B. vagy *U*-ra való tekintettel az egyik igazságértéket (0, 1),
C. vagy *u*-k rendezett *n*-eseit.

Φ működési szabályai *Con* különböző típusú elemeire:

A. *Ha* c névkonstans, *akkor* $\Phi(c) \in U$ (Névhez az *U* egyik elemét rendelje!) *Magyarázat*: $\Phi(c)$ egy konkrét individuumot jelöl, azt, amelyiket Φ függvény *c* névkonstanshoz rendeli. Ha például *c* a 'Cicero' név konstansa, akkor $\Phi(c)$ a hús-vér Cicero, aki természetesen *U* egyik eleme.
B. *Ha* *F* 0-argumentumú predikátum, *akkor* $\Phi(F) \in \{0, 1\}$ (Mondatokhoz az egyik igazságértéket rendelje!)
C. *Ha* *F* *n*-argumentumú predikátum *és* ($n \geq 1$), *akkor* $\Phi(F)$ az *u*-kból képezhető rendezett *n*-esek egyik osztálya, mégpedig az, amelynek elemeire a predikátum igaz. (Predikátumhoz terjedelmet rendeljen!) Egy predikátumot úgy interpretálunk, hogy az adott tárgyalási univerzumban, a világ egy adott állásánál megmutatjuk, hogy mely individuumok állnak egymással a predikátum által megnevezett viszonyban ($n \geq 1$ esetén), illetve, hogy melyekre igaz ($n = 1$ esetén).

A./b. Értékelés

Az értékelés olyan (*v*) *függvény* (vagy más megközelítésben olyan *művelet*), amely a *Var* elemeihez, vagyis a változókhoz faktuális értéket rendel, tehát egy-egy *u*-t rendel hozzájuk, ahol $u \in U$. (Ez olyannyira hasonlít az interpretáció műveletéhez, hogy akár a „változók interpretálásának" is nevezhetnénk. Az eltérő megnevezést az motiválja, hogy így a változók faktuális értékének megadása a többi kifejezésétől terminológiailag is elkülöníthető, aminek a későbbiekben jó hasznát vesszük majd.)

v működési szabálya:

Ha $x \in Var$, *akkor* $v(x) \in U$ (Rendelje a változóhoz *U* egyik elemét, vagyis egy konkrét individuumot!)

Ez a szabály csak annyit mond, hogy *v* rendeljen *x*-hez egy individuumot, vagy hogy az értékelés a változókhoz a tárgyalási univerzum valamelyik elemét rendeli, de azt nem mondja meg, hogy melyiket. A *v*-ről akkor tudnánk meg többet, ha pontról pontra megadnánk, hogy melyik változóhoz (x-hez, y-hoz z-hez stb.) melyik individuumot rendeli. Ha azt akarjuk mondani, hogy v értékelés éppen u-t rendeli x-hez (tehát, hogy $v(x) = u$), azt így jelöljük: $v[x: u]$. Ez a v értékelés x-hez természetesen u-t rendeli, vagyis: $v[x: u](x) = u$ Amikor a Tankönyv a 123. oldalon így fogalmaz: „$v[x: u]$ jelöli azt az értékelést, amely legfeljebb annyiban különbözik v-től, hogy x-hez az u értéket rendeli." A „legfeljebb" kitétel az jelenti, hogy lehetséges, hogy nem is különbözik tőle: akkor tudniillik, ha olyan v-ről van szó, amely már eleve u-t rendelné x-hez.

Ezáltal még nem határoztuk meg teljesen v-t, hiszen nem adtuk meg, hogy milyen értéket rendel például y-hoz. Attól ugyanis, hogy $v[x: u]$ egy függvény, amely x-hez u-t rendeli, egy másik változóhoz rendelhet valami mást.

Ha $y \neq x$, *akkor* $v[x: u](y) = v(y)$

Vagyis az x-hez u-t rendelő v függvény egy másik változó, tehát egy olyan y esetében, amely különbözik x-től, a $v(y)$ értéket veszi fel. (Hogy ez konkrétan mi, az attól függ, melyik v függvényről van szó. Erről a függvényről ugyanis a $v[x: u]$ képlet keveset árul el. Mindössze annyit, hogy milyen értéket rendel x-hez, azt azonban nem, hogy milyen értéket rendel valami máshoz.)

Ha viszont y ugyanaz a változó, mint x, a $v[x: u]$ függvény nyilván $v(x)$ értéket rendeli hozzá, ami nem más, mint u. Hiszen $v[x: u]$ épen azt jelenti, hogy a $v(x)$ értéke u. Tehát

Ha $y = x$, *akkor* $v[x: u](y) = u$

(Figyelem! A Tankönyv 123. oldalának utolsó képlet-sora az „és" mentén tagolódik. Szerencsésebb lett volna két sorba írni.)

B.

B./a. A terminusok és a formulák faktuális értékei

Terminusok: a *Var* elemei és *Con* elemei közül a névkonstansok.

Formulák: az induktív definícióval megadott osztály elemei. (A bázis kimondta, hogy *Con* azon elemei, amelyek nem terminusok, vagyis a nulladrendű elemzés atomi mondatai, valamint a predikátumok (köztük az azonosság) argumentumokkal kitöltve a formulák közé tartoznak. Az ezekből *Log* segítségével képzett kifejezéseket az indukciós szabályok sorolták a formulák közé.)

$|A|_v^{Ip}$ jelenti A faktuális értékét adott interpretáció és értékelés mellett. A | | zárójel a közé írt kifejezésből annak faktuális értékét képzi. A továbbiakban, amikor a terminusok ((**S1**)-(**S2**)), és a formulák ((**S3**)-(**S8**)) faktuális értékeit kívánjuk megadni, az ^{Ip} szimbólumot nem írjuk ki, mert az interpretációt adottnak vesszük.

A most következő tárgyalás épít az A. alfejezetben kifejtettekre. De míg ott azt mondtuk el, milyen szabályok szerint működik azt értékelés, illetve interpretáció, most azt fogalmazzuk meg, mi lesz a faktuális értéke az egyes nyelvi elemeknek, ha értékeljük, illetve interpretáljuk őket. Amikor például még csak a szabályokat rögzítettük, a változókkal kapcsolatban azt követeltük meg, hogy faktuális értékük legyen az *U* eleme. Most ennél többet mondunk, amennyiben *U* egy konkrét eleméről beszélünk majd. Igaz, hogy melyikről, azt most sem adjuk meg, ugyanis nem adjuk meg azt sem, hogy konkrétan melyik értékelésről van szó.

(S1) *Ha* $x \in Var$, *akkor* $|x|_v = v(x)$.

Kiolvasás: Egy individuumváltozó faktuális értéke az, amit az őt értékelő függvény számára kijelöl. (Mégpedig $v(x) \in U$.)

Magyarázat: Az értékelés a változóhoz a tárgyalási univerzum egy elemét rendeli (ezt jelöli ki a számára), mert az individuumváltozó individuumnevekkel helyettesíthető be, a nevek faktuális értéke pedig a jelölet, vagyis egy individuális dolog. Tehát az individuumváltozóhoz (x), amely névjellegű valami, az értékelés (v), amely a faktuális érték hozzárendelését jelenti, csak egy konkrét dolgot, egy individuumot rendelhet a tárgyalási univerzum (U) elemei közül.

(S2) *Ha* c névkonstans, *akkor* $|c|_v = \Phi(c)$.

Kiolvasás: Egy névkonstans (névparaméter) faktuális értéke az, amit az őt interpretáló függvény számára kijelöl. (Mégpedig $\Phi(c) \in U$.)

Magyarázat: A képletben a v tulajdonképpen felesleges, hiszen az individuumnév konstansa nem tartalmaz értékelhető változót, ezért faktuális értékét csak az interpretációja adja meg. Korábban láttuk, hogy az individuumnevekhez az interpretáció függvénye *U* egyik elemét, az individuális objektumok egyikét rendeli.

(S3) *Ha* F 0-argumentumú predikátum, *akkor* $|F|_v = \Phi(F)$.

Kiolvasás: Egy 0-argumentumú predikátum (felbontatlanul hagyott állítás) faktuális értéke az, amit az interpretációja tulajdonít neki. (Mégpedig $\Phi(F) \in \{1, 0\}$.)

(S4) *Ha* F n-argumentumú predikátum, *és* $n \geq 1$ *és* $t_1, \ldots t_n$ terminusok, amelyek Φ és v szerinti faktuális értékei rendre $u_1, \ldots, u_n$, *akkor* $|F(t_1) \ldots (t_n)|_v = 1$, *ha* $\langle u_1, \ldots u_n \rangle \in \Phi(F)$, *és* 0 egyébként.

Kiolvasás: Egy n-argumentumú predikátum argumentumhelyeinek kitöltésével keletkező mondat faktuális értéke pontosan akkor 1, *ha* a predikátum interpretációja a predikátumhoz (a predikátum igazságtartományába) sorolja azt a rendezett n-est, amelynek tagjai a mondat megfelelő sorrendbe állított terminusainak faktuális értékei. ($|t_1|_v = u_1$ stb.)

Magyarázat: A „Φ és v szerinti faktuális értékei” kitételre azért van szükség, mert a terminusok között lehetnek névkonstansok, amelyekhez Φ, és lehetnek változók, amelyekhez v rendel faktuális értéket. Korábban láttuk, hogy *ha* F n-argumentumú predikátum *és* ($n \geq 1$), *akkor* $\Phi(F)$ az u-kból képezhető rendezett n-esek egyik osztálya. Ha pl. $n = 2$, akkor $\Phi(F)$ azoknak a rendezett pároknak az osztálya, amelyekre F igaz. Ez az osztály F faktuális értéke. Ha tehát $\langle u_1, \ldots u_n\rangle$ olyan rendezett n-es, amely beletartozik F faktuális értékébe, akkor az $F(t_1) \ldots (t_n)$ formula igaz.

(S5) *Ha* t_1 és t_2 terminusok, *akkor* $|t_1 = t_2|_v = 1$, *ha* $|t_1|_v = |t_2|_v$, *és* 0 egyébként.

Kiolvasás: Két terminusból az azonosságpredikátummal képzett formula vagy mondat faktuális értéke pontosan akkor 1, *ha* a két terminus faktuális értéke megegyezik.

(S6) *Ha* A és B formulák, *akkor*

$|(A \,\&\, B)|_v = 1$, *ha* $|A|_v = |B|_v = 1$, *és* 0 egyébként.

$|(A \vee B)|_v = 0$, *ha* $|A|_v = |B|_v = 0$, *és* 1 egyébként.

$|(A \supset B)|_v = 0$, *ha* $|A|_v = 1$, $|B|_v = 0$, *és* 1 egyébként.

$|(A \equiv B)|_v = 1$, *ha* $|A|_v = |B|_v$, *és* 0 egyébként.

Magyarázat: Az alapvető kétargumentumú igazságfunktorokat korábban a faktuális értékük (igazságszabályuk) alapján definiáltuk. Itt tulajdonképpen ezeket az igazságszabályokat idéztük fel, bár most az igazságfunktorokkal képzett egyszerű formulák faktuális értéke, és nem közvetlenül az igazságfunktorok faktuális értéke érdekel bennünket.

(S7) *Ha* A formula, *akkor* $|{\sim}A|_v = (1 - |A|_v)$

Kiolvasás: Egy negált formula igazságértékét úgy kapjuk, hogy a formula igazságértékét (0 vagy 1) kivonjuk egyből.

(S8) *Ha* x változó és A formula, *akkor*

$|\forall xA|_v = 0$, *ha* van olyan $u \in U$, hogy $|A|_{v[x:\,u]} = 0$, *és* 1 egyébként.

Kiolvasás: Egy univerzálisan kvantált kifejezés pontosan akkor hamis, ha van a tárgyalási univerzumban olyan elem, amelyet a kvantor hatókörben a kvantorral lekötött változó értékének véve a hatókör hamis lesz.

Magyarázat: A kvantor hatóköre az A formula. Ahhoz, hogy ennek faktuális értéket tulajdonítsunk, a benne szereplő változót (ha van benne változó), értékelni kell. $|A|_{v[x:\,u]}$ azt jelenti, hogy az x kvantifikálható változót tartalmazó A formula faktuális értékének megadásakor azt az értékelést választjuk, amely x-hez u individuumot rendeli.

$|\exists xA|_v = 1$, *ha* van olyan $u \in U$, hogy $|A|_{v[x:\,u]} = 1$, *és* 0 egyébként.

Kiolvasás: Egy egzisztenciálisan kvantált kifejezés pontosan akkor igaz, ha van a tárgyalási univerzumban olyan elem, amelyet a kvantált változó értékének véve a hatókört igaz lesz.

B./b. L^1 további elemeinek faktuális értékei

Ezzel L^1 (= ⟨*Log*, *Var, Con, Term, Form*⟩) legtöbb elemének világos a faktuális értéke.

Log elemeihez nem szokás faktuális értéket rendelni.

(**S1**)-(**S8**) *Term* és *Form* faktuális értékét adta meg.

Var elemei valamennyien a *Term* osztályba tartoznak.

Con elemei többnyire vagy a *Term* osztályba tartoznak, vagy az *n*-argumentumú predikátumok paraméterei.

→» Mi lehet az oka annak, hogy *Log* elemeihez nem szokás faktuális értéket rendelni?

→» *Con* elemei között névfunktorok is szerepelhetnek. Hogyan lehetne ezek faktuális értékét a fentiek mintájára megadni?

III. Centrális szemantikai fogalmak

Kielégíthetőség

A kielégíthetőséget formulaosztályokra definiáljuk. Egy Γ formulaosztály kielégíthető, ha van olyan $Ip = \langle U, \Phi\rangle$ interpretáció és ehhez csatlakozó v értékelés, hogy minden A formulára: *ha* $A \in \Gamma$, *akkor* $|A|_v^{Ip} = 1$. Más szóval a formulák egy osztálya akkor kielégíthető, ha van olyan interpretáció és értékelés, amely a formulaosztály minden tagját igazzá teszi, tehát ha lehet úgy interpretálni és értékelni az osztály formuláiban előforduló szimbólumokat, hogy a formulaosztály minden formulája igaz legyen. A röviden, kevésbé szabatosan: a kielégíthetőség az együttes igazság lehetősége.

Modell

A $\langle U, \Phi, v\rangle$ hármas Γ modellje, ha $Ip = \langle U, \Phi\rangle$ interpretáció és ehhez csatlakozó v értékelés esetén minden A formulára: ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_v^{Ip} = 1$.

→» Igaz-e, hogy ha Γ üres, akkor bármely $\langle U, \Phi, v\rangle$ hármas a modellje?

→» Igaz-e, hogy egy formulaosztály kielégíthetetlen, ha nincs modellje?

Szemantikus következményreláció

Γ formulaosztály szemantikai következménye az A formula ($\Gamma \Rightarrow A$), *ha* $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen.

Magyarázat: A { } zárójelpár segítségével egy osztályt adhatunk meg úgy, hogy a zárójelben felsoroljuk az osztály elemeit. Itt egy egyelemű osztályt képeztünk azért, hogy Γ osztályt $\cup$ jel segítségével egyesíthessük vele.

→» Igaz-e, hogy ha Γ minden modellje A formulának is modellje, akkor $\Gamma \Rightarrow A$?

Logikai igazság

L^1 nyelv egy A formulája érvényes, azaz logikai igazság, ha üres formulaosztálynak is következménye. (A logikai igazságok jelölése ($\Rightarrow A$) is ezt a tényt fejezi ki.)

→» Mutassa ki, hogy a logikai igazságok negációjának nincs modellje!

Következményreláció két fontos törvénye

Dedukciótétel: $\Gamma \cup \{C\} \Rightarrow A$ *akkor és csak akkor, ha* $\Gamma \Rightarrow C \supset A$.

Metszettétel: *Ha* $\Gamma_1 \Rightarrow A$ és $\Gamma_2 \cup \{A\} \Rightarrow B$, *akkor* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B$.

2. Mit értünk logikai kalkuluson?

(Tankönyv 127-129. oldal)

Szemantikai felépítésűnek mondunk egy logikai rendszert, ha benne a centrális logikai fogalmak (például az érvényesség és a következményreláció) az interpretáció fogalmára épülnek. Mivel az interpretáció a faktuális értékekkel függ össze, a nyelven túli valósághoz köti a logikai rendszert. Ez a valóságban való lehorgonyzottság teszi a rendszert szemantikai felépítésűvé, hiszen a szemantika a nyelv és a nyelven túli valóság viszonyát vizsgáló tudományág.
Szintaktikai fölépítésű egy logikai rendszer, ha felépítésében nem támaszkodik a szemantikára (ha például a következményreláció az interpretáció és így a faktuális érték fogalma nélkül értelmezhető benne). A szintaxis éppúgy a szemiotika, a jeltudomány része, mint a szemantika, de nem a jeleknek a nyelven túli valósággal való viszonyát, hanem a jelek egymás közti viszonyait vizsgálja. A logikai szintaxis magában foglal egy formalizált grammatikát (szótárt és szabályrendszert), ez által meghatározza a formula szabatos fogalmát, továbbá tartalmazhatja a következményreláció szabatos fogalmát, vagyis a jólképzett jelegyüttesek egymáshoz való viszonyának egy rendszerét.
Egy *logikai kalkulus* nem más, mint egy szintaktikai felépítésű logikai rendszer, amelyben definiálva van a következményreláció is. Hogy két formula között fennáll-e ez a reláció, annak nincsenek olyan „objektív” kritériumai, mint a szemantikai rendszerben. Itt minden a definíciókon múlik.
A *szintaktikai következményreláció* jele: $\vdash$

I. A szemantikus és a szintaktikai rendszerek viszonya

Erről a viszonyról csak akkor lehet értelmesen beszélni, ha közös, vagy egymásba lefordítható nyelvre épülnek. Legyen *L* egy nyelv, *S* egy szemantikai rendszer, *K* egy kalkulus, Γ egy formulaosztály, *A* pedig egy tetszőlegesen bonyolult belső szerkezetű formula!
K helyes S-re nézve, ha minden *K* szerinti helyes következtetés *S*-ben is helyes (de fordítva nem feltétlenül). Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \Rightarrow$ A.
K teljes S-re nézve, ha minden *S* szerint helyes következtetés *K*-ban is helyes (de fordítva nem feltétlenül). Ha $\Gamma \Rightarrow$ A, akkor $\Gamma \vdash A$.

K adekvát S-hez, ha helyes és teljes, vagyis ha az a következtetés, amelyik az egyik rendszerben helyes, helyes a másikban is az. $\Gamma \Rightarrow A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash A$.

II. A szintaktikai következményreláció definíciója

Most nem támaszkodhatunk a kielégíthetőség fogalmára, mint a szemantikus rendszerekben. Ezért a definíciót két lépésben, adjuk meg.

1. Megadjuk az alapformula fogalmát. Az alapformulák a rendszer kvázi „érvényes” formulái, „logikai igazságai”. Az alapformulák száma nagy lehet, ezért alapsémák segítségével adjuk meg őket. Az alapformulák az alapsémák szabályos behelyettesítései, vagy olyan változatai, amelyek elé kvantorokat illesztettünk.

2. Értelmezzük a levezethetőség fogalmát tetszőleges Γ formulaosztályból, mégpedig úgy, hogy felsoroljuk, milyen típusú levezetéseket fogadunk el. Itt a rendszerépítőnek teljes szabadsága van. Gyakran fogadják el a következő szabályokat:

   a. Ha A alapformula, akkor $\Gamma \vdash A$ (Mivel Γ tetszőleges formulaosztály, akár üres is lehet. Hasonlóan ahhoz, hogy a szemantikus rendszer logikai igazságai a „semmiből” is következnek, érdemes úgy tekinteni, hogy a szintaktikai rendszer alapformulái is következnek akár az üres osztályból is, és így bármely gazdagabb Γ osztályból is.

   b. Ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$.

   c. Kiegészítő szabályok arról, hogy ha valami levezethető, akkor mi az, ami még levezethető. Leggyakrabban elfogadott levezetési szabály a *modus ponens* (MP). Ha $\Gamma \vdash (A \supset B)$ és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$.

      →» A Tankönyv a 129. oldalon beszél az egymással ekvivalens, ám különböző felépítésű kalkulusokról. Miben állhat két ekvivalens kalkulus felépítésének a különbsége?

      →» Hasonlítsa össze az ekvivalencia itt használt fogalmát az adekvátság egy oldallal korábban bevezetett fogalmával, és az ekvivalencia szemantikus logikában megismert fogalmával!

A tudományokban gyakran követett eszmény szerint a kalkulusokat igyekeznek minél takarékosabban kiépíteni, vagyis igyekeznek minél kevesebb kiindulóponttal dolgozni. Minél több levezetési szabályt fogadunk el eleve, annál kevesebb alapformulára, és minél több formulát tekintünk alapformulának, annál kevesebb levezetési szabályra van szükség. Elképzelhető, hogy egy rendszerben alapformulák nincsenek, csak levezetési szabályok.

→» Fordítva is elképzelhető?

(Figyelem! A Tankönyv 129. oldalán a 3. bekezdés hibás: ~~2.5 fejezetben bemutatjuk~~ Helyesen: 1.5 fejezetben bemutatjuk)

3. A QC fölépítése

(Tankönyv 130-132. oldal)

A **QC** (quantificational calculus) az elsőrendű nyelvek közös logikai kalkulusa.

I. A QC fölépítése

Egy kalkulust úgy adunk meg, hogy megadjuk a szótárt, amelyre épül, felsoroljuk vagy sémák segítségével definiáljuk az alapformuláit, és megadjuk a levezetési szabályait.

Szótár

Mivel az elsőrendű nyelvek kalkulusát akarjuk kiépíteni, azok szótárára kell támaszkodni.

$L^1 = \langle Log, Var, Con, Term, Form \rangle$

A takarékossági elvnek megfelelően a **QC** esetében $Log = \{(,), \sim, \supset, =, \forall\}$. (Bár a Tankönyv nem használja őket, a továbbiakban a hosszabb formulákban az átláthatóságot olykor a (és a) helyett álló [,] **[**, **]**, **(**, **)** zárójelek fogják segíteni.) A többi logikai konstans a **KL**-ből ismert törvényekkel definiálható.

Alapsémák

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$

(A3) $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

(A4) $\forall x A \supset A^{t/x}$

(A5) $\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

(A6) $A \supset \forall x A$ – Ha A-ban x-nek nincs szabad előfordulása.

(A7) $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x})$ –Ahol $\boldsymbol{x}$ a tárgynyelvi változók sorozatának első tagja.

(A8) $(x = y) \supset (A^{x/z} \supset A^{y/z})$

$A^{t/x}$ pontos jelentése: Az a formula, ami úgy keletkezik A-ból, hogy benne x szabad előfordulásait t-val helyettesítjük.

(Figyelem! A Tankönyv korábbi kiadásának 130. oldalán **(A1)** hibás. ~~$A \supset (B \supset C)$~~. Helyesen: $A \supset (B \supset A)$.)

→» A Tankönyv 130. oldalán az alapsémákhoz fűzött megjegyzés első sorában az áll, hogy „*x*, *y*, *z*, változókkal, *t* pedig terminussal helyettesíthető be”. Mit lehetne annak válaszolni, aki úgy vélné, hogy ezek nem változókkal, illetve terminussal helyettesíthetők be, hanem ezek maguk a változók, illetve ez maga a terminus?

→» Szerepelhetne-e egyáltalán a **QC**-ben az ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$) formula abban az esetben is, ha **(A7)** inkább (x=x) alakú volna? Miért?

→» A Tankönyv szerint takarékosabb eljárás, ha **(A7)** ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$) alakban, nem pedig ($x = x$) alakban szerepel, feltéve, hogy az utóbbi valóban levezethető lesz az előbbiből. Miért takarékosabb ez?

→» A Tankönyv szerint **(A4)** megfordítása is benne rejlik **(A6)-**ban. Magyarázza el, hogyan rejlik benne!

Alapformulák

Az alapsémák szabályos behelyettesítései és az alapformulák univerzális generalizáltjai.

→» Alapsémákra azért volt szükségünk, hogy segítségükkel megadhassuk az alapformulákat. De miért van szükség az alapformulákra? Miért nem elég, hogy tudjuk, a **QC** arra az elsőrendű nyelvre épül, amelyben induktív definícióval már megadtuk a formula fogalmát? (Úgy tűnik, ha nem volnának alapformuláink, az alábbi levezetési szabályok közül az elsőt mellőzhetnénk, és a kalkulusunk még takarékosabb lenne…)

Levezetési szabályok

a. Ha A alapformula, akkor $\Gamma \vdash A$.

b. Ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$.

c. Ha $\Gamma \vdash (A \supset B)$ és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$. (MP vagy leválasztási szabály)

Néhány új fogalom

Az A formulát *bizonyítható*nak mondjuk, ha $\Gamma \vdash A$, *és* Γ üres osztály. Jelölése: $\vdash A$ Az alapsémák bizonyíthatónak minősülnek. A levezetésekben olykor $\vdash A$ lesz a jele annak, hogy A alapformula.

→» Vajon **QC**-ben csak az alapformulák és az alapsémák lehetnek bizonyíthatók a szónak az itt megadott értelmében?

A *levezetés* egy olyan formulasorozat, amelynek későbbi tagjai rendre a korábbiaknak vagy az alapformuláknak a szintaktikai következményei.

A levezethető Γ-ból, ha van olyan levezetés, amelynek első tagja *Γ*, utolsó *A*. (Jelölése: $\Gamma \vdash A$)

Γ-ból való levezetés olyan véges, de nem üres formulasorozat, amelynek tagjai

- vagy alapformulák,
- vagy *Γ* elemei,
- vagy leválasztással nyerhetők a sorozat megelőző tagjaiból.

→» Magyarázza el a „bizonyítható", a korábban említett „érvényes" és a „levezethető" közti különbséget!

II. A KL és a QC viszonya (A QC helyessége)

A **QC** adekvát a **KL**-hez. Ez a tétel két másikat foglal magában. Egyrészt, hogy a **QC** helyes a **KL**-re nézve, másrészt, hogy a **QC** teljes a **KL**-re nézve. E két tétel közül egyelőre az elsőt láthatjuk be, a másodikat későbbre kell halasztani.

Az, hogy a **QC** helyes a **KL**-re nézve, azt jelenti, hogy nem von le olyan következtetést, amely a **KL**-ben helytelen volna. Az imént a levezetési szabályok felsorolásánál láttuk, hogy a **QC** minden következtetése három típusra vezethető vissza ezekről kell tehát bizonyítani, hogy a **KL**-ben is helyes következtetések lennének. A bizonyításhoz előzetesen be kell látni, hogy a **QC** minden alapformulája logikai igazság a **KL** szerint. Mivel az alapformulák az alapsémákból eredeztethetők, méghozzá két külön eljárással, most is két alesetet kell megkülönböztetni.

→» Ha a **QC** helyessége a **KL**-re nézve levezetési szabályainak helyességén múlik, miért kell az alapformuláival is foglalkozni? (Úgy tűnhet, ez szükségtelen, hiszen ha az alapformulák a **KL**-ben hamisak volnának is, attól még lehetne belőlük helyesen következtetni. A következtetés helyességének ugyanis nem feltétele a premisszák igazsága.)

1. Az alapsémák a **KL** logikai igazságai, amit analitikus táblázattal is könnyen bizonyíthatunk. Ha az alapsémák logikai igazságok, akkor nyilvánvalóan a behelyettesítésükkel adódó alapformulák is azok.

→» Készítse el az analitikus táblázatokat!

→» Bizonyítsa az első három alapsémát áthelyezési törvény (Tankönyv 42. oldal) segítségével is! (Segítség: Az **(A2)** esetében először az első nagy zárójelen belül alkalmazza, majd az ($A \supset B$) tagot helyezze át. Az **(A3)** esetében az áthelyezés után támaszkodjon a *modus tollens*re!)

→» Magyarázza el saját szavaival, miért mondhatjuk, hogy a **QC** minden alapformulája logikai igazság a **KL** szerint!

2. A logikai igazság univerzális generalizáltja is logikai igazság. Azért mondunk ugyanis egy formulát logikai igazságnak, mert minden interpretáció és értékelés mellett igaz. Ha egyik változóját univerzális kvantorral kötjük le a formula nem fog ennél erősebb állítást tenni. Hiszen egy Fx formula univerzális generalizáltja, $\forall xFx$ akkor és csak akkor igaz, ha maga az Fx formula x minden értékelése mellett igaz. A tételt abból kiindulva is beláthatjuk, hogy ha egy formula minden interpretáció és értékelés mellett igaz, akkor a formája miatt igaz. Azzal viszont, hogy egy formula elé az univerzális kvantort illesztem, azt a követelményt támasztom, hogy a formula bármely értékelés mellett igaz legyen. Csakhogy akármilyen értékelést válasszunk is, ez a formula *formáján* nem változtat, legfeljebb a tartalmát érinti. Így az értékelés a formula formális igazságát nem befolyásolhatja. Ha a formula logikai igazság volt, vagyis formája miatt volt igaz, igaz marad az értékelés bármilyen módosítása mellett is. Mindez hatványozottan igaz, ha a kiinduló formulában nem voltak szabadon értékelhető változók. Ekkor az univerzális generalizáció semmiféle tartalmi változtatást nem tesz lehetővé, így még kevésbé befolyásolja a formális, a logikai igazságot.

Ezek után már az egyes eseteket áttekintve bizonyíthatjuk, hogy ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \Rightarrow A$, vagyis hogy a **QC** helyes a **KL**-re nézve.

a.) A **QC** szerint, ha A alapformula, akkor tetszőleges Γ-ból következik, vagyis $\Gamma \vdash A$. Mivel azonban az alapformulák a **KL** logikai igazságai, és a logikai igazságok a **KL**-ben is következnek tetszőleges premisszákból, ezért $\Gamma \Rightarrow A$ is fennáll.

b.) Ha $A \in \Gamma$ (és ezért $\Gamma \vdash A$), akkor a **KL**-ben is igaz, hogy $\Gamma \Rightarrow A$, mert a **KL**-ben egy formulaosztályból bármely tagja következik.

c.) Ha A egy levezetett formula (vagyis $\Gamma \vdash A$), akkor olyan lépésekkel (MP) állt elő, amelyet a **KL** is elismer, így ugyanazon Γ-ból a **KL** is levezetné ($\Gamma \Rightarrow$ A).

(Figyelem! A Tankönyv korábbi kiadásának 131. oldalán az utolsó előtti bekezdés első sora hibás: ~~QC-ben ∀ ⊢ A~~. Helyesen. **QC**-ben Γ ⊢ A)

III. A QC töredéke: a PC

A **PC** (propositional calculus) a nulladrendű extenzionális logika kalkulusa.

Csak **(A1) (A2) (A3)** alapsémákat tartalmazza.

Az alapformulák meghatározásából hiányzik az univerzális generalizáció szabálya.

Nyelvtan

$L^0 = \langle Log_0, At, Form\rangle$;

$Log = \{(,), \sim, \supset\}$

At = atomi formulák (a nulladrendű elemzésben felbontatlanul hagyott kifejezések, például mondatparaméterek, függetlenül attól, hogy ezek belsejében rejtőznek-e kvantorok) egy nem üres osztálya.

Form = a legszűkebb osztály, amely eleget tesz három kikötésnek.

a.) Ha $A \in At$, akkor $A \in Form$.

b.) Ha $A \in Form$, akkor $\sim A \in Form$.

c.) Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B) \in Form$.

→» *Az Elsőrendű nyelvek és szemantikájuk* című fejezetben megismerkedtünk a formula induktív definíciójával. Magyarázza el, hogy a **PC** formuláinak iménti definíciója milyen viszonyban van az ottani **(F1)-(F7)** pontokkal!

Levezetési szabályok

Ugyanazok, mint a **QC** esetében.

→» Következik-e a **PC**-ben $\forall xA$-ból az, hogy $A(a)$, ahol a egy individuum neve? Miért?

4. LEVEZETÉSEK QC-BEN

(Tankönyv 133-137. oldal)

Az alábbi levezetések egyes lépéseinek magyarázatát a jobb oldali oszlop adja meg, megmutatva, hogy milyen művelettel, melyik korábbi, számozott sorból következik az adott sor bal oldalán álló formula. A * azokat a tételeket jelzi, amelyek a **QC** tejességének bizonyításához szükségesek lesznek. Az alábbi levezetések rendszerint több sort tartalmaznak, mint a Tankönyv levezetései. Céljuk éppen az, hogy explicitté tegyék azt, ami a Tankönyv nem mutat meg részleteiben. (A Tankönyv a 133. oldalon említett zárójel-elhagyási megállapodást a 42. oldalon vezette be.)

I. Levezetések a PC-ben

PC.1. Ha $\Gamma \vdash A$ és Γ' egy bővítése Γ-nak, akkor $\Gamma' \vdash A$.

Ezt a szabályt gyakran úgy fogjuk használni, hogy Γ üres osztály (amelyet ki sem írunk), és így Γ' egy vagy több tetszőleges formulát tartalmazó osztály.

PC.2. Ha $(A \supset B) \in \Gamma$ és $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash B$.

1. $(A \supset B) \in \Gamma$	föltevés
2. $A \in \Gamma$	föltevés
3. $\Gamma \vdash A \supset B$	LSZ: 1
4. $\Gamma \vdash A$	LSZ: 2
5. $\Gamma \vdash B$	MP: 3,4

További magyarázat: Az LSZ kód a Tankönyv 131. oldalán a *Levezetési szabályok* alcím alatt a) pontban megadott szabályokra utal: Ha A alapformula, akkor $\Gamma \vdash A$; *és* ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$. **PC.2.** esetében ezek közül a másodikra támaszkodunk. Az első sorban feltettük, hogy $(A \supset B)$ eleme Γ-nak. Ha eleme, akkor LSZ szerint le is vezethető belőle (3. sor).

→» Igaza volna-e annak, aki a *modus ponens*t ismerve **PC.2.** láttán azt gondolná, hogy $(A \supset B) \in \Gamma$ és $A \in \Gamma$ esetén $B \in \Gamma$ is igaz? Miért?

PC.3. Ha $\Gamma \vdash A \supset C$ és $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash C$.

1. $\Gamma \vdash A \supset C$	föltevés
2. $A \in \Gamma$	föltevés
3. $\Gamma \vdash A$	LSZ: 2
4. $\Gamma \vdash C$	MP: 1,3

→» Mi a pontos viszony a **PC.2.**, **PC.3.** és MP között?

PC.4. $\vdash A \supset A$

(Vagyis $A \supset A$ bizonyítható, a semmiből is következik, „logikai igazság”.)

1. $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$	**(A2)**
2. $[A \supset (B \supset A)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset A)]$	C helyett A-t írva
3. $A \supset (B \supset A)$	**(A1)**
4. $(A \supset B) \supset (A \supset A)$	MP: 2,3
5. $[(A \supset (A \supset A)] \supset (A \supset A)$	4, B helyett $(A \supset A)$
6. $A \supset (B \supset A)$	**(A1)**
7. $A \supset (A \supset A)$	6, B helyett A
7. $A \supset A$	MP: 5,7

További magyarázatok: A levezetések során bármikor felhasználhatunk premissza gyanánt egy alapsémát. Ezek a **QC** (és a **PC**) részét képezik, annak bizonyítható formulái, bizonyos értelemben minden nem triviális bizonyítás kiindulópontjai.

Mivel az 1. sorban C *tetszőleges* séma vagy formula, nyugodtan helyettesíthető A-val. Az alapsémában azért nem eleve A szerepel a helyén, hogy a séma jelezze, akár C *akár* más is lehet, mit A. Ezért a 2. sorban álló séma az **(A2)** gyengített változata.

Hasonló indoklás adható az 5. és a 7. sorhoz is.

PC.5. $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash A \supset C$. **Dedukciótétel** (DT)

Ennek a tételnek két része van:

α.) Ha $\Gamma \vdash A \supset C$ akkor $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$.

β.) Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ akkor $\Gamma \vdash A \supset C$.

α nem más, mint **PC.3.** egy variánsa. Ennek belátása azonban tovább tart, mint α bizonyítása, ezért nem követjük a Tankönyvet, és **PC.5.**-öt nem **PC.3.**-ból származtatjuk (mint **PC.3.**

egyesítését önmaga megfordításával), hanem α és β egyesítéseként, és α és β külön-külön bizonyítását adjuk. β bizonyítása a Tankönyvet követi.

→» Magyarázza el, miért mondhatja a 133. és a 134. oldal, hogy **PC.3.** megfordítása a következő: Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ akkor $\Gamma \vdash A \supset C$.

α bizonyítása

1. $\Gamma \vdash A \supset C$	föltevés
2. $\Gamma \cup \{A\} \vdash A \supset C$	**PC.1.**: 1
3. $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$	LSZ [Itt LSZ-t tételként fogalmazzuk meg.]
2. $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$	MP: 2,3

β bizonyítása

Négy eset lehetséges attól függően, hogy miféle formula C. β akkor tekinthető bizonyítottnak, ha mind a négy esetben kimutatható, hogy $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ esetén $\Gamma \vdash A \supset C$ is fennáll. Olyan levezetések kell szerkeszteni, amelyben az első sor mindig $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ (legalábbis képzeletben, hiszen néha nem kell rá ténylegesen támaszkodni), az utolsó pedig $\Gamma \vdash A \supset C$.

I.

C (ismeretlen belső szerkezetű) alapformula, az alapsémák egyikének behelyettesítése.

0. $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$	
1. $\vdash C$	föltevés
2. $\vdash C \supset (A \supset C)$	**(A1)** (betűcserékkel)
3. $\vdash A \supset C$	MP: 1,2
4. $\Gamma \vdash A \supset C$	**PC.1.**: 3 [Ami a semmiből is következik, az a semmi + Γ-ból is.]

II.

C nem más, mint A (vagyis eleme a premisszák osztályának, $\Gamma \cup \{A\}$-nak).

A levezetendő $\Gamma \vdash A \supset C$ most a $\Gamma \vdash A \supset A$ alakot ölti.

0. $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$	
1. $\vdash A \supset A$	**PC.4.**
2. $\Gamma \vdash A \supset A$	**PC.1.**: 1 [A „semmit" bővítjük Γ-val.]

(Az utolsó sorban akár vissza is helyettesíthetjük az egyik A helyére C-t: $\Gamma \vdash A \supset C$.)

(Figyelem! A Tankönyv 133. oldalán az (ii) sor hibás: ~~PC.3 szerint~~ Helyesen: PC.4 szerint.)

III.

$C \in \Gamma$ (vagyis újra része a premisszák osztályának).

1. $C \in \Gamma$ föltevés
2. $\Gamma \vdash C$ LSZ: 1
3. $\vdash C \supset (A \supset C)$ **(A1)** (betűcserékkel)
4. $\Gamma \vdash C \supset (A \supset C)$ **PC.1.**: 3
5. $\Gamma \vdash A \supset C$ MP: 2,4

További magyarázat: A 4. sorra azért volt szükség, mert korábba a MP-t úgy definiáltuk, hogy ha $\Gamma \vdash (A \supset B)$ és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$. Itt minden tagban szerepelt Γ is. Ezért a 3. sor még nem volt olyan alakú, hogy MP része lehessen.

IV.

Röviden

C egy olyan formula, amely nem premissza és nem alapformula. Ha mégis szerepelhet egy levezetés konklúziójában, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy az eddig egyetlen nem triviális levezetési szabályunkkal, MP-vel lehetett levezetni. A levezetés során nyilván felbukkant egy $B \supset C$ és B alakú formulapár (ahol B tetszőleges formula), amelyből levezethető volt. E formulákat viszont esetleg szintén MP-vel nyertük megfelelő szerkezetű formulákból stb. Akármilyen hosszú legyen is ez a levezetés, végül vissza kell vezetnie az alapformulákig vagy a Γ premisszaosztályig.

Az I-III. pontban megmutattuk, hogy C levezetésének bármely lehetséges kiindulópontja (vagyis az alapformulák és Γ premisszaosztály elemei is) a rendelkezett azzal a tulajdonsággal, hogy „*egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezethető Γ-ból*". Hiszen az I-III. pontok levezetései rendre a $\Gamma \vdash A \supset C$ sorhoz vezettek, amelyet C-re koncentrálva kissé mesterkélten az iménti mondattal olvashatunk ki.

Most, a IV. pontban azt kell még belátnunk, hogy C egy hosszú, MP-re épülő levezetés végén is rendelkezni fog ezzel az „*egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezethető Γ-ból*" tulajdonsággal, amellyel levezetésének minden lehetséges kiindulópontja rendelkezett. Ez, függetlenül attól, milyen hosszú a levezetés, azon múlik, hogy MP örökíti-e ezt a tulajdonságot, vagy nem, tehát MP „természetén" múlik. Ha MP rendelkezik a kívánt természettel, akkor *tetszőleges* formulákról örökíti a szóban forgó tulajdonságot belőlük levezethető formulára.

Tegyük fel, hogy $(B \supset C)$ és B rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal, vagyis azzal, hogy „*egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezethető Γ-ból*":

1. $\Gamma \vdash [A \supset (B \supset C)]$ föltevés
2. $\Gamma \vdash A \supset B$ föltevés
3. $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$ **(A2)**
4. $\Gamma \vdash [A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$ **PC.1.**: 3
5. $\Gamma \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$ MP: 1,3
6. $\Gamma \vdash A \supset C$ MP: 5,2

Ezzel az öröklődés igazolódott. $(B \supset C)$ és B nyilván olyan formulák, amelyekből C levezethető. És ha olyan formulák is, amelyekre igaz, hogy *„egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezethetők Γ-ból”* (ezt a feltevést fogalmaztuk meg az 1-2. sorokban), akkor MP-vel örökítette ezt a tulajdonságot C-re. (Ugyanilyen vizsgálat elvégezhető volna külön-külön B-re és $(B \supset C)$-re is, egészen, amíg a premisszákig vissza nem jutunk, amelyek I-III. bizonyítások szerint mind rendelkeznek a kérdéses tulajdonsággal.)

Hosszabban

C egy Γ-ból levezethető formulákból MP-vel levezethető formula.

Mik lehetnek ezek a Γ-ból levezethető köztes formulák? Jelöljük őket X-szel! Három eset lehetséges.

1. vagy alapformulák,
2. vagy Γ elemei,
3. vagy az X-ek maguk is MP-vel vezethetők le Γ elemeiből.

1-2. Az első két esetben az I. és a III. pontban mondottakra támaszkodhatunk. Beláttuk, hogy az alapformulák és Γ elemei esetében fennáll a $\Gamma \vdash (A \supset X)$. Ezt a tényt *szavakban* a következőképpen rögzíthetjük: ezek az X formulák rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy *„egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezetető Γ-ból*”.

3. A harmadik eset nehezebb. Ha X maga is csak MP-vel vezethető le Γ-ból, akkor két alternatíva van.

3a. az X-ek vagy közvetlenül,

3b. vagy közvetve vezethetők le Γ elemeiből.

3a. Most azzal az esettel kell elszámolni, hogy voltak Γ elemei között olyan tagok (Y), amelyek MP-vel X-eket adnak. (Az egyik ilyen Y lehet például ($D \supset X$), a másik D.) Mivel ezek az Y-ok elemei Γ-nak, III. alapján $\Gamma \vdash (A \supset Y)$ igaz lesz, vagyis ezek az Y-ok is rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy „*egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezetető Γ-ból*". Így azok az X-ek, amelyekből MP-vel C keletkezik, olyan Γ-beli Y-okból keletkeztek MP-vel, amelyek rendelkeznek ezzel a nevezetes tulajdonsággal.

3b. Ha az X-ek közvetetten vezethetők le MP-vel Γ-ból, akkor azok az Y-ok, amelyekből levezethetők, nem Γ elemei, hanem maguk is V-kből vezethetők le MP-vel, amely V-k esetleg további W-kből stb.. Bizonyos azonban, hogy a levezetés (ha valóban Γ-ból való levezetés) előbb utóbb olyan Z-khez (is) ér, amelyek Γ elemei, és ezért III. alapján igaz rájuk, hogy $\Gamma \vdash (A \supset Z)$, vagyis igaz, hogy ezek a Z-k „*egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezetetők Γ-ból*". Amikor tehát Γ elemeiből MP-vel elkezdünk levezetni, hogy a levezetésben egyszer C-hez érjünk, a levezetés kiinduló tagjai (Z) rendelkeznek a mondott tulajdonsággal.

Kérdés, hogy MP továbbörökíti-e a tulajdonságot Z-ről W-re, és így tovább egészen X-ig és végül C-ig. Ez ugyanaz a kérdés, amelyik az 1., 2. és 3a. pont esetében is perdöntő. Azok az X-ek amelyekről 1. és 2. esetében beláttuk, hogy rendelkeznek a kérdéses tulajdonsággal, tovább kell, hogy örökítsék a tulajdonságot C-re, különben nem állíthatjuk biztosan, hogy C is rendelkezik vele [$\Gamma \vdash (A \supset C)$]. Márpedig **PC.5.** bizonyítása kedvéért éppen ezt kell belátni. Ugyanígy a 3a. esetben említett Y-oknak is az X-ekre és rajtuk keresztül C-re kell örökíteni a tulajdonságot.

Hogy ez valóban megtörténik-e, az semmi mástól nem függ, mint MP „természetétől". Ha MP képes az örökítésre, akkor bármely a nevezetes tulajdonsággal rendelkező formulapárról örökíti a tulajdonságot a belőlük adódó formulára.

Hogy eldöntsük, vajon MP ilyen természetű-e, két olyan tetszőleges formulát kell választani, amelyekről feltesszük, hogy rendelkeznek a kérdéses tulajdonsággal, és amelyekből MP-vel előállítható egy harmadik. A két formulát egy levezetés bármely szakaszából kiemelhetjük. Lehetnek e formulák akár azok is, amelyek a levezetésben közvetlenül C előtt foglalnak helyet, például B és ($B \supset C$). Így jelöljük, hogy ezekre a kiválasztott formulákra igaz az a tulajdonság, amelynek öröklődését vizsgáljuk: $\Gamma \vdash (A \supset (B \supset C))$, illetve $\Gamma \vdash (A \supset (B))$. Azt kell ellenőrizni, hogy ezekből levezethető-e a $\Gamma \vdash (A \supset C)$ sor. Ha igen, akkor MP a B és a ($B \supset C$) formulákról C-re örökítette a tulajdonságot. (És természetesen így tenne bármely hasonló formulapár esetén is.) A levezetés újra a következő:

1. $\Gamma \vdash [A \supset (B \supset C)]$	föltevés
2. $\Gamma \vdash A \supset B$	föltevés
3. $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$	**(A2)**
4. $\Gamma \vdash [A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$	**PC.1.**: 3
5. $\Gamma \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$	**MP**: 1,3
6. $\Gamma \vdash A \supset C$	**MP**: 5,2

Ezzel meggyőződtünk róla, hogy MP valóban örökíti a nevezetes tulajdonságot.

Összegezve a IV. pont eredményeit elmondható, hogy a Γ-tól C-ig tartó levezetés esetén C rendelkezni fog az „*egy A előtagú kondicionális utótagjaként levezetető Γ-ból*” tulajdonsággal, mert C bármely lehetséges „őse”, tehát az alapformulák (1.), Γ elemei (2.), a (szintén Γ elemei közé tartozó) Y-ok (3a.) és Z-k (3b.), egyaránt rendelkeznek vele, MP pedig mindig továbbörökíti a tulajdonságot. Márpedig C éppen MP-vel keletkezik.

Az I-IV. pontok együtt bizonyítják β-t, amely α-val együtt adja **PC.5.**-öt

→» Hasonlítsa össze a **PC.5.**-öt szemantikai variánsával: $\Gamma \cup \{A\} \Rightarrow C$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \Rightarrow A \supset C$, és az áthelyezési törvénnyel: $(A \& B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset (B \supset C))$!

PC.6. Ha $\Gamma_1 \vdash$ A és $\Gamma_2 \cup \{A\} \vdash B$, akkor $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B$. **Metszettétel (**metszet)

1. $\Gamma_1 \vdash A$	föltevés
2. $\Gamma_2 \cup \{A\} \vdash B$	föltevés
3. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash A$	**PC.1.**: 1 [Mert már Γ_1-ből is levezethető.]
4. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A\} \vdash B$	**PC.1.**: 2 [Mert már $\Gamma_2 \cup \{A\}$-ból is levezethető.]
5. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash A \supset B$	DT: 4
6. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B$	MP: 3,5

PC.7. Ha $\Gamma \cup \{{\sim}A\} \vdash {\sim}B$, akkor $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$. ko.po. fele

1. $\Gamma \cup \{{\sim}A\} \vdash {\sim}B$	föltevés
2. $\Gamma \vdash {\sim}A \supset {\sim}B$	DT: 1
3. $\vdash ({\sim}A \supset {\sim}B) \supset (B \supset A)$	**(A3)**
4. ${\sim}A \supset {\sim}B \vdash B \supset A$	DT: 3
5. $\Gamma \vdash B \supset A$	metszet 2,4
6. $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$	DT: 5

További magyarázat az 5. sorhoz. A metszettételben, ahogyan **PC.6.** megfogalmazza, szerepel Γ_1, Γ_2 és $\{A\}$, amelyek a fenti levezetésben egyáltalán nem fordultak elő. A levezetés a következő behelyettesítésekre támaszkodik. Γ_1 helyett Γ, Γ_2 helyett $\varnothing$, $\{A\}$ helyett $\sim A \supset \sim B$.

***PC.8.** $\sim\sim A \vdash A$

1.	$\{\sim\sim A\} \vdash \sim\sim A$	LSZ
2.	$\{\sim\sim A, \sim\sim\sim\sim A\} \vdash \sim\sim A$	**PC.1.**: 1
3.	$\{\sim\sim A, \sim A\} \vdash \sim\sim\sim A$	**PC.7.**: 2
4.	$\{\sim\sim A, \sim\sim A\} \vdash A$	**PC.7.**: 3
5.	$\{\sim\sim A\} \vdash A$	egyszerűsítés
6.	$\sim\sim A \vdash A$	egyszerűsítés

További magyarázatok. Az egyik LSZ kimondja, hogy Ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$. Az 1. sorban a célul kitűzött bizonyításra való tekintettel kiválasztottunk egy egyelemű Γ-t, mégpedig a $\{\sim\sim A\}$ osztályt, és LSZ szerint állítjuk, levezethető belőle $\sim\sim A$.

A második sorban **PC.1.** az első sor Γ-ját egy olyan formulával bővíti, amelyet újra csak semmi más nem tüntet ki, csak az, hogy éppen ere a formulára van szükségünk, hogy a bizonyítást elvégezhessük.

A harmadik sor úgy keletkezik a másodikból, hogy a 2. sor jeleníti meg **PC.7.** első tagját [$\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash \sim B$], a 3. sor a második tagját [$\Gamma \cup \{B\} \vdash A$].

2. sor	$\sim\sim A$	,	$\sim(\sim\sim\sim A)$	$\vdash$	$\sim(\sim A)$
PC.7. eslő tagja	Γ	$\cup$	$\sim A$	$\vdash$	$\sim B$

illetve

3. sor	$\sim\sim A$	,	$\sim A$	$\vdash$	$\sim\sim\sim A$
PC.7. második tagja	Γ	$\cup$	B	$\vdash$	A

Kellemetlen, hogy a táblázatok különböző soraiban A nem ugyanazt jelenti, de a zárójeleket kitéve könnyen látható, hogy **PC.7.** A-ja mostani levezetésünkben $\sim\sim\sim A$-nak felel meg, B-je pedig$\sim A$-nak.

Hasonlóképpen kell okoskodni ahhoz, hogy a harmadik sorból megkapjuk a negyediket: Az előbbi **PC.7.** első felének fele meg, az utóbbi a másodiknak. Most természetesen más behelyettesítést kell, hogy kapjon A és B.

Az utolsó két lépésben két azonos premisszából az egyiket kihúzzuk, mert attól nem lesz nagyobb bizonyító ereje egy premisszának, ha kétszer mondjuk, majd az így keletkező egyelemű osztály helyett az egyetlen elemét írjuk. Az egyelemű osztálynak ugyanis éppen annyi bizonyító ereje van, mint az elemének.

PC.9. $A \vdash {\sim}{\sim}A$

1.	${\sim}{\sim}A \vdash A$	**PC.8.**
2.	${\sim}{\sim}{\sim}A \vdash {\sim}A$	1, A helyett ${\sim}A$-t írva
3.	$A \vdash {\sim}{\sim}A$	**PC.7.**: 2

További magyarázat. A harmadik sor úgy keletkezik a másodikból, hogy a 2. sor jeleníti meg **PC.7.** első tagját a 3. sor a másodikat. Legyen a **PC.7.**-beli Γ az üres osztály, legyen ${\sim}A$ a második sorban szereplő ${\sim}{\sim}{\sim}A$, illetve feleltessük meg ${\sim}B$-t a második sorban szereplő ${\sim}A$-nak!

PC.8. és **PC.9.** együtt a kettős negáció törvényét adják:
$A \vdash {\sim}{\sim}A$ akkor és csak akkor, ha ${\sim}{\sim}A \vdash A$.
Eddigi eredményeinkből megkapjuk a kettős negáció törvényének egy speciális megfogalmazását is: a páratlan számú ~ egyre redukálható. Ezt a tételt **PC.9.** levezetésének 2. sorában már bizonyítottuk. A tétel megfordítása ugyanennek a levezetésnek a 3. sorából adódik, ha abban A helyett ${\sim}A$-t írunk.

PC.10. $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{{\sim}A\} \vdash {\sim}B$. ko.po.
A bizonyítást két szakaszban végezzük.
α *Ha* $\Gamma \cup \{{\sim}A\} \vdash {\sim}B$ *akkor* $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$. Ez nem más, mint **PC.7.**, amelyet már bizonyítottunk.
β *Ha* $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ *akkor* $\Gamma \cup \{{\sim}A\} \vdash {\sim}B$.

1.	$\Gamma \cup \{B\} \vdash A$	föltevés
2.	${\sim}{\sim}B \vdash B$	**PC.8.**
3.	$\Gamma \cup \{{\sim}{\sim}B\} \vdash A$	metszet 2,1 [Γ_1 szerepében ${\sim}{\sim}B$, Γ_2 szerepében Γ]
4.	$A \vdash {\sim}{\sim}A$	**PC.9.**
5.	$\Gamma \cup \{{\sim}{\sim}B\} \vdash {\sim}{\sim}A$	metszet 3,4 [Γ_1 szerepében $\Gamma \cup {\sim}{\sim}B$, Γ_2 szerepében $\varnothing$]
6.	$\Gamma \cup \{{\sim}A\} \vdash {\sim}B$	**PC.7.**: 5

***PC.11**. $\{{\sim}A, A\} \vdash B$

Egy ellentmondó (inkonzisztens) formulapárból bármi levezethető.

1. $\{{\sim}A\} \vdash {\sim}A$ LSZ
2. $\{{\sim}A, {\sim}B\} \vdash {\sim}A$ **PC.1.**: 1
3. $\{{\sim}A, A\} \vdash B$ ko.po.: 2

További magyarázat: ko.po. bal oldalán $\Gamma \cup \{B\}$ áll, vagyis egy tetszőleges osztály egyesítése egy olyan elemeinek felsorolásával megadott osztállyal, amelynek csak egy eleme van. A 2. sorban $\{{\sim}A\}$ kifejezés felel meg Γ-nak, amelyet egy elemmel, ${\sim}B$-vel bővítünk.

A harmadik sorban B tetszőleges kifejezés lehet, tehát egy ellentmondó formulapárból *bármely* formula levezethető. Ez egy egyszerű példa az inkonzisztenciára, amely nem csak ellentmondó formulapárok képében nyilatkozhat meg.

Valaminek a *levezethetősége* nyilvánvalóan a levezetési szabályoktól és a kiinduló formuláktól függ. Ahhoz például, hogy A-ból és ${\sim}A$-ból a tetszőleges B-t levezethessük, szükség volt **PC.11.**-re. Ez azonban nem érvényes a **QC** (illetve a **PC**) alapsémái és levezetési szabálya, a MP nélkül. A **PC.11.**-hez vezető levezetések sora ugyanis ez volt:

(A1) és **(A2)** → DT → metszet → ko.po → **PC.11.**

Közben gyakran használtuk (pl. DT és MP levezetésénél) a MP-t, és gyakran hivatkoztunk a LSZ-re is, amelyeket a **QC** (illetve a **PC**) kiépítésénél választottunk érvényes szabályoknak. Eszerint az *inkonzisztencia kalkulusfüggő*. Az A és ${\sim}A$ pár más kalkulusban talán nem volna inkonzisztens. Egy ilyen kalkulus, amelyben tehát **PC.11.** nem volna érvényes, biztosan nem volna teljes **KL**-re nézve, mert nem tudná rekonstruálni annak minden következtetését. Ellentmondó állításokból ugyanis **KL**-ben bármi következik, ahogy ez analitikus táblázattal röviden bizonyítható is.

Definíció. Legyen L egy formalizált nyelv, Σ egy erre épülő logikai kalkulus, Γ pedig az L nyelv egyik formulaosztálya! Ekkor Γ-t Σ-inkonzisztensnek mondjuk, ha belőle L minden formulája levezethető. Γ Σ-konzisztens, ha nem Σ-inkonzisztens.

→» Lehet-e egy kalkulus maga is inkonzisztens? Miért?

→» Az, hogy a **QC**-ben levezethető egy olyan tétel, mint **PC.11.**, amely tetszőleges formula levezethetőségét állítja, jelenti-e azt, hogy a **QC** maga is **QC**-inkonzisztens? Miért?

→» Tegyük fel, hogy van egy **C1** kalkulus, amelyben az $\{A, {\sim}A\}$ formulaosztály nem inkonzisztens! Vajon **C1** kalkulus adekvát-e **KL**-hez? Miért?

→» Tegyük fel, hogy van egy **C2** kalkulus, amelyben érvényes a $\{A, \sim A\} \vdash B$ tétel! Vajon milyen alapsémákat és levezetési szabályokat kell elfogadni ahhoz, hogy **C2** teljes legyen **KL**-re nézve? (Az nem követelmény, hogy helyes is legyen!)

Ez a definíció, amely a konzisztenciát csak a kalkulusok körében értelmezi, analógiásan kiterjeszthető szemantikai rendszerekre is. A „konzisztens” a szemantikus logika fogalmai közül a „kielégíthetőnek”, az „inkonzisztens” a „kielégíthetetlennek” felel meg.

A **PC** töredéke a **QC**-nek, vagyis minden, ami levezethető a **PC**-ben, levezethető a **QC**-ben is. Ezért ami inkonzisztens a **PC** ben, inkonzisztens a **QC**-ben is, de fordítva nem így van, hiszen például $\forall xA$ és $\sim A^{a/x}$ inkonzisztens a **QC**-ben, de konzisztens a **PC**-ben.

A **QC**-inkonzisztencia bizonyítása.

Azt kell belátni, hogy egy tetszőleges B levezethető a $\{\forall xA, \sim A^{a/x}\}$ formulaosztályból.

1.	$\sim A^{a/x}$	föltevés
2.	$\forall xA$	föltevés
3.	$\forall xA \supset A^{t/x}$	**(A4)**
4.	$A^{t/x}$	MP: 2,3
5.	Aa	behelyettesítés 4
6.	$\sim Aa$	behelyettesítés 1
7.	$\{Aa, \sim Aa\} \vdash B$	PC.11.
8.	$Aa \vdash \sim Aa \supset B$	DT: 7
9.	$Aa \supset (\sim Aa \supset B)$	DT: 8
10.	$(\sim Aa \supset B)$	MP: 5,9
11.	B	MP: 6, 1

További magyarázatok. Az 5. és 6. sor azért írható fel, mert **(A4)**-ben, t nem egy konkrét, hanem egy tetszőleges terminust jelent.

→»Mutassa meg, hogy **PC.11.**-nek az 5. és 6. sorra való közvetlen alkalmazásával gyorsabban is eljuthattunk volna a kívánt eredményre.

A **PC**-konzisztencia bizonyítása

Ha a kiinduló formulapárból következnének olyan formulák, amelyek egymás negáltjai, akkor az **PC**-inkonzisztens volna.

1. A $\forall xA$ típusú formulákat a **PC**-ben atomi formuláknak tekintjük. (Ezzel a feltétellel vesszük fel őket egy L^0 nulladrendű nyelvbe.) Nem bonthatók fel, vagyis nincsen más következményük, mint önmaguk.

2. Mivel $A^{a/x}$ azt a formulát jeleni, amely úgy keletkezik A-ból, hogy benne x szabad előfordulásait a-val helyettesítjük, ha x-nek nincsenek szabad előfordulásai, vagy még inkább, ha A felbontatlan mondatot jelent, amelynek a belsejében semmiféle műveletet nem végezhetünk, akkor $A^{a/x} \Leftrightarrow$ A. (Vö.: Tankönyv 82. oldal). Így $\sim A^{a/x}$-nek sincsen más következménye, mint önmaga, illetve $\sim A$.

3. Csakhogy $\forall xA$ nem negáltja a $\sim A$-nak, így a kiinduló formulaosztályból nem következnek egymásnak ellentmondó formulák, amelyekből aztán tetszőleges B formulára következtethetnénk.

A két bizonyítása eredményeképpen azt kaptuk, hogy az az erősebb követelmény, hogy egy formulaosztály **QC**-konzisztens legyen, ezért az (in)konzisztes kifejezést mindig a **QC**-re való tekintettel fogjuk használni.

PC.12. Ha $A \in \Gamma$ és $\Gamma \vdash \sim A$, akkor Γ inkonzisztens.

1.	$A \in \Gamma$	föltevés
2.	$\Gamma \vdash \sim A$	föltevés
3.	$\Gamma \vdash A$	LSZ: 1
4.	$\{\sim A, A\} \vdash B$	**PC.11.**
5.	$\sim A \vdash A \supset B$	DT: 4
6.	$\Gamma \vdash A \supset B$	metszet 2,5 [Γ_1 szerepében Γ, Γ_2 szerepében $\varnothing$]
7.	$\Gamma \vdash B$	MP: 6,3

Mivel B tetszőleges formula, azért Γ valóban inkonzisztens.

***PC.13.** $\Gamma \vdash A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens.

Ennek két része van.

α Ha $\Gamma \vdash A$ akkor $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens.

β Ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens, akkor $\Gamma \vdash A$.

α bizonyítása: mutassuk ki, hogy ha $\Gamma \vdash A$, akkor tetszőleges B levezethető $\Gamma \cup \{\sim A\}$-ból!

1. $\Gamma \vdash A$ — föltevés
2. $\Gamma \cup \{\sim A\}$ — föltevés
3. $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash \sim A$ — LSZ: 2
4. $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash A$ — **PC.1.**:1
5. $\{A, \sim A\} \vdash B$ — **PC.11.**
6. $A \vdash \sim A \supset B$ — DT: 5
7. $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash \sim A \supset B$ — metszet: 4,6
8. $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash B$ — MP: 3,7

β bizonyítása:

1. $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens — föltevés
2. $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash A$ — 1. [Ha inkonzisztens, akkor levezethető belőle akár *A* is.]
3. $\Gamma \vdash \sim A \supset A$ — DT: 2
4. $\{\sim A, \sim A \supset A\} \vdash A$ — MP [Itt MP-t mint tételt írtuk fel alkalmas tagokkal.]
5. $\{\sim A, \sim A\} \vdash \sim(\sim A \supset A)$ — ko.po: 4
6. $\sim A \vdash \sim(\sim A \supset A)$ — egyszerűsítés: 5
7. $(\sim A \supset A) \vdash A$ — ko.po: 6
8. $\Gamma \vdash A$ — metszet: 3,7

→» Mi a viszony **PC.13.** és a szemantikai következményreláció következő definíciója között: *A* formula Γ formulahalmaz logikai következménye, ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen?

***PC.14.** Ha Γ konzisztens, és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \cup \{A\}$ is konzisztens.

Indirekt bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\Gamma \vdash A$, továbbá Γ konzisztens, de $\Gamma \cup \{A\}$ nem az! Vagyis tegyük fel, hogy Γ-ból nem vezethető le tetszőleges *B*, de $\Gamma \cup \{A\}$-ból igen!

1. $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ — föltevés
2. $\Gamma \vdash A$ — föltevés
3. $\Gamma \vdash A \supset B$ — DT: 1
4. $\Gamma \vdash B$ — MP 2,3

Feltettük, hogy Γ-ból nem vezethető le *B*, mégis levezettük. Ez azt jelenti, hogy ellentmondáshoz jutottunk, vagyis az eredeti tételt igazoltuk.

***PC.15.** Ha Γ konzisztens, és $(A \supset B) \in \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{\sim A\}$ és $\Gamma \cup \{B\}$ közül legalább az egyik konzisztens.

Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens, vagyis bármi levezethető belőle. Ezt a föltevést a 2. sor rögzíti.

1.	$(A \supset B) \in \Gamma$	föltevés
2.	$\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash C$	föltevés
3.	$\Gamma \vdash A$	**PC.13.**: 2
4.	$\Gamma \vdash A \supset B$	LSZ: 1
5.	$\Gamma \vdash B$	MP: 3,4

De **PC.14.** szerint ha Γ konzisztens, és $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \cup \{B\}$ konzisztens. QED (Quod Erat Demonstrandum – Ezt kellett bizonyítani.)

***PC.16.** $\sim(A \supset B) \vdash A$

1.	$\{A, \sim A\} \vdash B$	**PC.11.**
2.	$\sim A \vdash A \supset B$	DT: 1
3.	$\sim(A \supset B) \vdash A$	ko.po: 2

***PC.17.** $\sim(A \supset B) \vdash \sim B$

1.	$A \supset (B \supset A)$	**(A1)**
2.	$B \supset (A \supset B)$	betűcserék: 1
3.	$B \vdash (A \supset B)$	DT: 2
4.	$\sim(A \supset B) \vdash \sim B$	ko.po: 3

II. Levezetések a QC-ben

QC.1. Ha $\Gamma \vdash A$, és x-nek nincs szabad előfordulása Γ elemeiben, akkor $\Gamma \vdash \forall xA$.

A bizonyítás három lépést foglal magában.

I. Ha A alapformula, akkor az alapformula definíciója szerint (Tankönyv 131. oldal) $\forall xA$ is az.

1.	$\vdash \forall xA$	Az alapformulák bizonyíthatók.
2.	$\Gamma \vdash \forall xA$	**PC.1.**: 1

II. Ha $A \in \Gamma$ (vagyis premissza), akkor x-nek nincs szabad előfordulása A-ban (a második feltevés **QC.1.** megfogalmazásában), ezért **(A6)** alkalmazható.

1.	$\Gamma \vdash A$	föltevés
2.	$A \supset \forall xA$	**(A6)**
3.	$A \vdash \forall xA$	DT: 2
4.	$\Gamma \vdash \forall xA$	metszet: 1,3

III. A egy MP-vel nyert formula.

Definiáljuk a *„Γ-ból univerzálisan kvantálva* is *levezethetőnek lenni”* tulajdonságot (K)! K két elemet foglal magában. A levezethetőséget és a kvantálva levezethetőséget. Valamely D akkor és csak akkor rendelkezik ezzel a K tulajdonsággal, ha nemcsak hogy $\Gamma \vdash D$ igaz, hanem $\Gamma \vdash \forall xD$ is.

Rendelkezik-e egy MP-vel levezetett A is ezzel a tulajdonsággal? Ez a levezetésén múlik: a premisszákon és a levezetés lépésein.

A levezetés premisszái Γ elemei és alapformulák lehetnek. Tudjuk, hogy e premisszákra igaz K.

1. Ha A alapformula, akkor bizonyítható, vagyis a semmiből is levezethető, így Γ-ból is, ugyanakkor az I. pontban beláttuk, hogy $\Gamma \vdash \forall xA$ is igaz.
2. Ha $A \in \Gamma$, akkor a levezetési szabályok értelmében A levezethető Γ-ból, ugyanakkor a II. pontban beláttuk, hogy $\Gamma \vdash \forall xA$ is igaz.

A levezetés minden tagja MP-vel keletkezik a premisszákból, hiszen most, a III. pontban kifejezetten az MP-vel levezetett formulákat kívánjuk vizsgálni. MP egyébként is a **QC** egyetlen nem triviális levezetési szabálya. (DT, metszet, ko.po. stb. szintén MP-re támaszkodik).

Tegyük fel, hogy az A egy $(B \supset A)$ és egy B alakú formulából vezethető le, ezek valami másokból, amik pedig megint másokból stb. Biztos, hogy a sor elején olyan premisszák állnak, amikre érvényes K, vagyis hogy univerzálisan kvantálva is levezethető Γ-ból.

Kérdés, hogy azon az úton, amelyen a premisszáktól A-hoz jutunk, nem veszik-e el ez a tulajdonság. Mivel a levezetés minden lépése MP, ezért azt kell megtudni, MP örökíti-e a K tulajdonságot.

Ennek két feltétele van:

1. Minden új tag legyen levezethető Γ-ból: ez eleve teljesül, hiszen a Γ-ból való levezetés során való öröklődésről beszélünk.
2. Minden új tag legyen univerzálisan kvantálva is levezethető.

Vagyis MP-t kell abból a szempontból megvizsgálni, hogy tetszőleges K tulajdonságú formulákból mindig K tulajdonságút vezet-e le.

Tegyük fel, hogy $(B \supset C)$-re és B-re igaz a K tulajdonság!

1.	$\Gamma \vdash \forall x(B \supset C)$	föltevés
2.	$\Gamma \vdash \forall x(B)$	föltevés
3.	$\vdash \forall x(A \supset B) \supset (\forall xA \supset \forall xB)$	**(A5)**
4.	$\vdash \forall x(B \supset C) \supset (\forall xB \supset \forall xC)$	betűcserék: 3
5.	$\forall x(B \supset C) \vdash (\forall xB \supset \forall xC)$	DT: 4
6.	$\{\forall x(B \supset C), \forall xB\} \vdash \forall xC$	DT: 5
7.	$\Gamma \cup \forall xB \vdash \forall xC$	metszet: 1,6 [Γ_1 szerepében Γ, Γ_2 szerepében $\forall xB$]
8.	$\Gamma \cup \Gamma \vdash \forall xC$	metszet: 2,7 [Γ_1 szerepében Γ, Γ_2 szerepében Γ]
9.	$\Gamma \vdash \forall xC$	egyszerűsítés

Tehát MP valóban örökíti tetszőleges tagokról a „Γ-ból univerzálisan kvantálva is levezethető" tulajdonságot.

További magyarázat. Az első két sorban a föltevés látszólag csak azt fogalmazza meg, hogy a két vizsgált formula „kvantálva levezethető Γ-ból", de nem azt, hogy „kvantálva *is* levezethető Γ-ból", márpedig a K tulajdonság azt is magában foglalja, hogy kvantálva és kvantálatlanul is levezethető. Ugyanez a látszat támadhat az utolsó sor C formulájával kapcsolatban is. Ám a kvantálatlanul levezethetőség eleve teljesül, ha olyan $(B \supset C)$, B és C formulákról van szó, amelyek szerepelnek A-nak Γ-ból való levelezésében.

QC.1. Speciális esete: Ha $\vdash A$, akkor $\vdash \forall xA$. **univerzális generalizálás** UG

Ha Γ üres osztály, akkor is érvényes a **QC.1.** De ez nem pusztán Γ üressége miatt speciális eset, hanem azért is, mert ezzel együtt az a kikötés is elesik, amit a **QC.1.** esetében általánosságban meg kellett fogalmazni: a speciális törvény akkor is érvényes, ha A-ban van x-nek szabad előfordulása.

QC.2. Ha A-ban x helyettesíthető y-nal, és y nem fordul elő szabadon A-ban, akkor $\forall xA \vdash \forall yA^{y/x}$.

1. $\forall xA \supset A^{t/x}$ **(A4)**
2. $\forall xA \vdash A^{t/x}$ DT: 1
3. $\forall xA \vdash A^{y/x}$ betűcsere: 2
4. $\forall xA \vdash \forall yA^{y/x}$ **QC.1.**: 1

A tétel megfordítása is igaz: $\forall yA^{y/x} \vdash \forall xA$. **(A6)** szerint ugyanis ha A-ban x-nek nincs szabad előfordulása, akkor $A \supset \forall xA$. És $\forall yA^{y/x}$ olyan formula, amelyben éppen x helyett írtunk mindenütt y-t.

QC.3. Ha $\Gamma \vdash A^{a/x}$, és a nem fordul elő Γ elemeiben, akkor $\Gamma \vdash \forall xA$.

1. $\Gamma \vdash A^{a/x}$ föltevés
2. $\Gamma \vdash A^{z/x}$ betűcsere: 1
3. $\Gamma \vdash \forall zA^{z/x}$ **QC.1.**: 2
4. $\Gamma \vdash \forall xA$ **QC.2.**: 3 (De z ne forduljon elő A-ban se szabadon!)

További magyarázatok: A 2. sorhoz: Mivel a **QC**-ben nincs különbség a névkonstansok és a változók szabad előfordulása között, egy név nemcsak egy másik névvel, hanem egy változóval (z) is lecserélhető, ha arra is teljesül az a kikötés, ami az eredeti névre (a) teljesült, hogy nem fordul elő szabadon Γ-ban!

A kiinduló feltevések mutatják, hogy a teljesen független Γ-tól. Ha mégis levezethető egy a-t tartalmazó formula Γ-ból, az nyilván nem a-n múlik, vagyis tetszőleges terminussal teljesül.

***QC.4.** Ha Γ konzisztens, és a nem fordul elő Γ-ban, és $\sim\forall xA \in \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{\sim A^{a/x}\}$ is konzisztens.

Az indirekt bizonyítás kedvéért az első sorban tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{\sim A^{a/x}\}$ inkonzisztens.

1. $\Gamma \cup \{\sim A^{a/x}\} \vdash \mathrm{B}$ — föltevés
2. $\Gamma \vdash A^{a/x}$ — **PC.13.**: 1
3. $\Gamma \vdash \forall xA$ — **QC.3.**: 2
4. $\sim\forall xA \in \Gamma$ — föltevés
5. $\Gamma \vdash \sim\forall xA$ — LSZ 4
6. $\{A, \sim A\} \vdash B$ — **PC.11.**
7. $\{\forall xA, \sim\forall xA\} \vdash B$ — behelyettesítés 6
8. $\forall xA \vdash \sim \forall xA \supset B$ — DT: 7
9. $\Gamma \vdash \sim\forall xA \supset B$ — metszet: 3,8
10. $\Gamma \vdash B$ — MP: 5,9

A bizonyítás kedvéért tett feltételezésünkből levezethető volt, hogy Γ inkonzisztens, ami ellentmond a kiinduló feltételezésnek. Tehát $\Gamma \cup \{\sim A^{a/x}\}$ mégsem inkonzisztens. QED

Az 5. sor helyett írhattuk volna rögtön, hogy Γ inkonzisztens, hiszen **PC.12.** éppen azt mondja, hogy ha Γ-ból levezethető egyik elemének negáltja, akkor Γ inkonzisztens. A 3 és 4. sor éppen ezt mutatja.

***QC.5.** $\vdash t = t$

1. $\vdash (\mathbf{x} = \mathbf{x})$ — **(A7)**
2. $\vdash \forall \mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{x})$ — UG: 1
3. $\vdash \forall xA \supset A^{t/x}$ — **(A4)**
4. $\vdash \forall \mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{x}) \supset (t = t)$ — Behelyettesítés: 3
5. $\vdash (t = t)$ — MP: 2,4

Itt vezettük le minden változóra az **(A7)**-et. Sőt, nemcsak minden változóra, hanem minden névre is (igaz ez utóbbi **(A7)** szabályos behelyettesítésként is adódna.)

***QC.6.** $\{(s = t), A^{s/z}\} \vdash A^{t/z}$

1. $\vdash (x=y) \supset (A^{x/z} \supset A^{y/z})$ — **(A8)**
2. $\vdash \forall x \forall y[(x=y) \supset (A^{x/z} \supset A^{y/z})]$ — UG: 1 (kétszer)
3. $\vdash \forall y[(s=y) \supset (A^{s/z} \supset A^{y/z})]$ — **(A4)**: 2
4. $\vdash [(s=t) \supset (A^{s/z} \supset A^{t/z})]$ — **(A4)**: 3
5. $(s=t) \vdash (A^{s/z} \supset A^{t/z})]$ — DT: 4
6. $\{(s=t), A^{s/z}\} \vdash A^{t/z}$ — DT: 4

4. A QC teljessége a KL-re nézve

(Tankönyv 138. oldal)

I. A feladat kijelölése

A **QC** teljessége a **KL**-re nézve azt jelenti, hogy a **QC** a **KL** minden következtetését reprodukálni képes, vagyis, hogy minden a **KL** szerinti következtetés fennáll a **QC**-ben is (de fordítva nem feltétlenül).

Ha $\Gamma \Rightarrow A$, akkor $\Gamma \vdash A$.

Ha a **QC** nem lenne teljes, akkor a **KL** valamelyik formulaosztályának lenne olyan következménye, amelyeket ugyanazokból a formulákból a **QC**-ben nem lehet levezetni.

Ha pontosan meg akarjuk mondani, hogy mit jelent az, hogy $\Gamma \Rightarrow A$, akkor a szemantikus következményreláció definíciójához kell fordulni:

$\Gamma \Rightarrow A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen.

Ismerünk egy ezzel analóg **QC**-törvényt: **PC.13.**

$\Gamma \vdash A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens.

Mivel $\Gamma \Rightarrow A$ fennállása esetén akarjuk $\Gamma \vdash A$ érvényességét belátni, ez az iménti két tételben szereplő „akkor és csak akkor” miatt annyi, mint ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlensége esetén akarnánk $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztenciáját belátni.

Mindezt grafikusan is szemléltethető. Ehhez az is elég, ha az iménti két tétel gyengébb változatát vesszük alapul (az „akkor és csak akkor” helyett elég a „ha, akkor”). Az alábbi ábrán betűkkel jelölt nyilak mindenütt „ha, akkor” kapcsolatot jelentenek.

Ha $\Gamma \Rightarrow A$ akkor, $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen.
(a) $\rightarrow$
$\downarrow$ (d) $\qquad$ $\downarrow$ (b)
$\leftarrow$ (c)
$\Gamma \vdash A$ akkor, ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens.

Az ábra mutatja, hogy $\Gamma \Rightarrow A$ és $\Gamma \vdash A$ között akkor tudjuk a **QC** teljességének bizonyításához megkövetelt kapcsolatot (d) igazolni, ha végigjárható az (a)-ból, (b)-ből és (c)-ből álló, nyilakkal kijelölt út. Ennek az útnak három lépése van, de az (a) és (c) lépésekkel már nem kell foglalkoznunk, hiszen ezek problémátlanok, mivel a szemantikus következményreláció definíciójára, illetve **PC.13.**-ra támaszkodnak. Így ha sikerülne bizonyítani a (b) lépést, akkor a (d) is bizonyított volna, vagyis belátnánk, hogy ha $\Gamma \Rightarrow A$, akkor $\Gamma \vdash A$. Ez pedig nem volna más, mint annak belátása, hogy a **QC** teljes a **KL**-re nézve.

II. A (b) lépés bizonyítása

Gyakorlatilag kerülő úton fogunk tehát haladni: először a kielégíthetőség/kielégíthetetlenség és a konzisztencia/inkonzisztencia fogalmát kapcsoljuk össze egymással. A $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlenségét analitikus táblázattal lehet belátni, ezért érdemes meggondolni, tudunk-e kapcsolatot teremteni az analitikus táblázat alapfogalmai és az inkonzisztencia fogalma között.

Előzetes megállapítások

1. **PC. 11.** szerint, ha egy formulaosztályban ellentmondó formulák vannak, akkor *inkonzisztens*.
2. Ennek kontraponáltja, hogy ha egy formulaosztály konzisztens, akkor nincsenek benne ellentmondó formulák.
3. Egy formulaosztály analitikus táblázatában minden *ágat* tekinthetünk a kiinduló formulaosztály bővítéseként keletkező formulaosztálynak.
4. Ezek szerint tehát, ha egy formulaosztály analitikus táblázatában egy-egy ág konzisztens, akkor nincsenek rajta ellentmondó formulák.
5. Azt mondjuk, hogy egy ág *nyitott* (kielégíthető), ha nincsenek rajta ellentmondó formulák.
6. Ezzel elérkeztünk az első fontos részeredményhez. Ha egy formulaosztály analitikus táblázatában egy ágon nincsenek ellentmondó formulák, vagyis konzisztens, akkor nyitott (és kielégíthető).
7. Érdemes még egy fogalmat előre rögzíteni. Az analitikus táblázat egy ága befejezett, ha valamennyi formulájának szerepel rajta minden konjunktív és az egyik alternatív származéka.

A (b) lépés bizonyításához két fontos tételt kell még bizonyítanunk.

1. Tétel

Ha egy Γ formulaosztály konzisztens,

akkor analitikus táblázatának van nyitott befejezett ága.

Megjegyzés. Ez a tétel tetszőleges Γ formulaosztályról szól. Bizonyítása közben félrevezető volna éppen a $\Gamma \cup \{\sim A\}$ képlet Γ-jára koncentrálni. (Valójában inkább magáról a $\Gamma \cup \{\sim A\}$ formulaosztályról fogunk beszélni az 1. Tétel bizonyítása és a 2. Tétel levezetése során.)

Bizonyítás. Γ analitikus táblázatnának azok a sorai, amelyek Γ tagjait tartalmazzák, olyan ágkezdeményt jelentenek, amely konzisztens, hiszen Γ a feltételezés szerint konzisztens. Ez az ágkezdemény az iménti 6. pont miatt egyben nyitott is. Ha biztosak lehetnénk abban, hogy Γ elemeinek származékai nem rontják le a származékok felírásával kibontakozó ág mint egyre bővülő formulaosztály konzisztenciáját, akkor abban is biztosak lehetnénk, hogy a származékok felírásával keletkező ágak nyitottak. Pontosabban, mivel az alternatív származékok elágaztatják az analitikus táblázatot, és a bizonyítandó tételhez (mint ahogy a szemantikus következményreláció fennállásához is) csak annyit követelünk meg, hogy a táblázat összes ága közül legalább egy legyen nyitott, de befejezett, most arról kell csak meggyőződni, hogy Γ konzisztenciája öröklődik azok közül az egyre nagyobb elemszámú formulaosztályok közül legalább egyre, amelyeket a Γ származékainak felírásakor keletkező ágak testesítenek meg.

Erről a **QC** eddig megismert levezetései segítségével győződhetünk meg. Négy alesetet különböztetünk meg aszerint, hogy milyen típusú formula származékáról van szó. Minden formula vagy A, vagy $\sim A$, vagy $\sim\sim A$, vagy $t_1 = t_2$, vagy $\sim(t_1 = t_2)$, vagy $(A \supset B)$, vagy $\sim(A \supset B)$, vagy $\forall xA$, vagy $\sim\forall xA$ alakú. Más típusú formula nincs, mert ami másmilyennek tűnik, az is visszavezethető ezekre.

0. csoport: A és $\sim A$.

Ezekkel nem kell foglalkozni. Ezeknek ugyanis nincsen származékuk, ezért nem fogják semmivel sem bővíteni Γ analitikus táblázatát, így nem tudják elrontani a konzisztenciát.

I. csoport: $\sim\sim A$, $\sim(A \supset B)$ és $\forall xA$

Vegyünk egy konzisztens Γ osztályt, és képzeljük el, mit csinálunk, amikor elkészítjük az analitikus táblázatát! Mindig újabb formulákat (a származékokat) írunk a Γ osztályhoz. Vagyis Γ-t újra meg újra egyesítjük olyan egytagú formulaosztályokkal, amelyeknek egyetlen tagja Γ *valamelyik* formulájának származéka. Ezeknek a bővítéseknek továbbra is konzisztens formulaosztály lesz az eredménye, *ha* az az egy tag, amellyel bővítünk, levezethető Γ-ból. **PC.14.** ugyanis kimondja: ha egy konzisztens formulaosztályt kibővítünk egy belőle levezethető formulával, akkor konzisztens formulaosztályt kapunk. [**PC.14.** Ha Γ konzisztens, és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \cup \{A\}$ is konzisztens.]

(Figyelem! A tankönyv 138. oldalán a Bizonyítás 3. sora hibás: ~~A PC. 15 tétel szerint~~. Helyesen: A PC. 14 tétel szerint.)

A kérdés tehát az, hogy Γ egyik elemének származéka levezethető-e Γ-ból. Ha igen, akkor **PC.1.** szerint egy bővebb osztályból, Γ-ból is. (Sőt abból a még bővebb osztályból is, ami Γ analitikus táblázatának egyik ága.) Lehetnek Γ-nak olyan elemei, ahol ez a levezethetőség fennáll, és az ilyen formulák tartoznak az I. csoportba. (II.-be azok tartoznak majd, ahol nem egy eleméből, hanem *kettőből*, de még mindig Γ-ból lehet levezetni.) Mint korábban bizonyítottuk, $\sim\sim A$, $\sim(A \supset B)$ és $\forall xA$ olyan formulák, amelyeknek a származékai a **QC**-ben önmagukból levezethetők:

PC.8. $\sim\sim A \vdash A$

PC.16. $(A \supset B) \vdash A$

PC.17. $(A \supset B) \vdash \sim B$

QC.2. bizonyításának 2. sora: $\forall xA \vdash A^{t/x}$

Tehát az I. csoportba tartozó formulák származékai **PC.14.** szerint örökítik Γ konzisztenciáját a $\Gamma \cup$ {származék} osztályra. Az ilyen formulákból keletkező első származékkal olyan bővebb formulaosztály jön létre, amely maga is konzisztens, és így a második származékkal még tovább bővített újabb formulaosztály konzisztenciának vizsgálatakor már nem az eredeti Γ, hanem az egy taggal kibővült osztály konzisztenciáját vehetjük alapul.

II. csoport: $t_1 = t_2$ és $\sim(t_1 = t_2)$

Az azonossági formuláknak önmagukban nincsen származékuk, hanem csak Γ egy másik elemével együtt. Ennek a származéknak a Γ-ból való levezethetőségéről **QC.6.** kezeskedik: $\{(s = t), A^{s/z}\} \vdash A^{t/z}$. Ezzel beláttuk, a **PC.14.** második feltételének (a levezethetőség) teljesülését. Az első feltétel (a konzisztencia) is teljesül, hiszen a $\{(s = t), A^{s/z}\}$ nyilván Γ egy részosztálya, és ha Γ konzisztens, akkor ez a részosztály is az. Ezért **PC.14.** szerint a II. csoportba tartozó formulák származékai is örökítik Γ konzisztenciáját a $\Gamma \cup$ {származék} osztályra.

III. csoport: $\sim\forall xA$

$\sim\forall xA$ származéka $\sim A^{a/x}$ (ahol a egy új név). A korábbiakban önálló törvény formájában bizonyítottuk, hogy ez a származék konzisztensen hozzáilleszthető egy $\sim\forall xA$-t tartalmazó konzisztens Γ-hoz. **QC.4.**: Ha Γ konzisztens, és a nem fordul elő Γ-ban és $\sim\forall xA \in \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{\sim A^{a/x}\}$ is konzisztens.

A III. csoport tehát már nem támaszkodik **PC.14**-re, hanem közvetlenül bizonyítottuk **QC.4** által, hogy a származék konzisztensen bővíti Γ-t, tehát örökíti a konzisztenciát.

IV. csoport: $A \supset B$

Külön esetet testesít meg $A \supset B$, mert alternatív származékai vannak. Ez az egyetlen olyan formula, amely elágaztatja a táblázatot. További (bár ezzel összefüggő) különbség, hogy az I.-III. csoport formulái esetében megmondhattuk, hogy mi mindennek kell igaznak lenni, hogy maguk a formulák igazak legyenek. Ezekről a származékokról vagy közvetlenül állította egy **QC**-törvény, hogy konzisztensen egyesíthetők Γ-val (III), vagy közvetve, az után, hogy be lehetett bizonyítani, hogy levezethetők Γ-ból (I-II.).

$A \supset B$ esetén egyik út sem járható. Nincs olyan törvény, amely kimondaná, hogy $A \supset B \vdash {\sim}A$, vagy $A \supset B \vdash B$. Ez logikus is így. A **KL**-ben sem áll, hogy $A \supset B \Rightarrow {\sim}A$ vagy $A \supset B \Rightarrow B$. Ha az analóg szintaktikai következményrelációk a **QC**-ben mégis bizonyíthatók volnának, akkor a **QC** nem lenne helyes a **KL**-re nézve. Olyant is levezetne, ami a **KL**-ben nem következik. Márpedig korábban bizonyítottuk, hogy a **QC** helyes a **KL**-re nézve.

Tehát nem járhatunk el úgy, mint I-II esetében. De a **QC**-ben olyan törvény sincs, amely mintegy a III. analógiájára állítaná, hogy ha $A \supset B \in \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{{\sim}A\}$ konzisztens, és olyan sincs, hogy ha $A \supset B \in \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{B\}$ konzisztens. Van viszont egy olyan törvény, amely kimondja, hogy $A \supset B$ származékai közül legalább az egyik konzisztensen bővítheti azt a Γ-t.

PC.15.: Ha Γ konzisztens, és $(A \supset B) \in \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{{\sim}A\}$ és $\Gamma \cup \{B\}$ közül legalább az egyik konzisztens.

Ez pedig elég is az 1. tétel bizonyításához, ugyanis egyetlen konzisztens ágat kerestünk. Bármely elágazás esetén legalább az egyik ág konzisztens marad.

Mivel elszámoltunk minden formulatípussal, és úgy találtuk, hogy Γ minden származékkal való kibővítése konzisztensen (vagy mint a IV. csoport esetében: konzisztensen *is*) bővíti Γ-t (illetve az egyre bővülő Γ-t), ezért tételünket bizonyítottuk. Ha egy *konzisztens* Γ-ból indulunk ki, akkor analitikus táblázatának lesz *nyitott* befejezett ága.

Korábban az előrebocsátott 5. pontban már felidéztük azt az analitikus táblázatokkal kapcsolatos tényt, hogy egy ág *nyitottsága* azt jelenti, hogy az ágon nincsen ellentmondó formulapár (ami mellesleg az inkonzisztencia legszembetűnőbb jele is volna). Ez pedig azt is jelenti, hogy a kiinduló formulaosztály (és persze maga az ág is), *kielégíthető*.

Ha ez a belátást láncszabállyal egyesítjük az 1. Tétellel, újabb tételhez jutunk.

2. Tétel

Ha Γ konzisztens, akkor kielégíthető.

Ezzel majdnem célba ért a bizonyításunk. Idézzük fel korábbi ábránkat:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ha } \Gamma \Rightarrow A \text{ akkor, } & & \Gamma \cup \{\sim A\} \text{ kielégíthetetlen.} \\ & \xrightarrow{(a)} & \\ \downarrow (d) & & \downarrow (b) \\ & \xleftarrow{(c)} & \\ \Gamma \vdash A \text{ akkor, ha } & & \Gamma \cup \{\sim A\} \text{ inkonzisztens.} \end{array}$$

Látható, hogy a (b) lépés „ha, akkor” jelentésű nyila a szemantikus fogalomtól vezet a szintaktikai felépítésű logika fogalmához, ezért (b) igazolásához a 2. Tétel kontraponáltjára van szükség: Ha Γ kielégíthetetlen, akkor inkonzisztens.

Az 1. Tételhez fűzött megjegyzés már felhívta rá a figyelmet, hogy az iménti fejtegetések során Γ tetszőleges formulaosztályt jelentett. Eredményeink természetesen bármely konkrét formulaosztályra érvényesek, így arra a $\Gamma \cup \{\sim A\}$ osztályra is, amelyről a (b) lépésben szó van (és amely némiképp szerencsétlen módon maga is használja a Γ jelet). A 2. tétel kontraponáltja szerint tehát, *ha* $\Gamma \cup \{\sim A\}$ *kielégíthetetlen, akkor* $\Gamma \cup \{\sim A\}$ *inkonzisztens*.

Ezzel igazoltuk a (b) lépést, ami a **QC**-nek a **KL**-hez való teljességének igazolását is jelenti. Hiszen az ábráról leolvasható, hogy kerülő úton a (d) lépést is igazoltuk: $[\Gamma \Rightarrow A] \rightarrow_{(d)} [\Gamma \vdash A]$.

Az ábra nyilai mentén megtett út így foglalható össze:

$$[\Gamma \Rightarrow A] \rightarrow_{(a)} [\Gamma \cup \{\sim A\} \text{ kielégíthetetlen}] \rightarrow_{(b)} [\Gamma \cup \{\sim A\} \text{ inkonzisztens}] \rightarrow_{(c)} [\Gamma \vdash A]$$

Az (a) lépés a szemantikus következményreláció definíciója alapján helyes, a (b) lépést most láttuk be, a (c) lépést pedig a **PC.13.** igazolja. Ha a nyilak helyett „ha, akkor”-t olvasunk, akkor az így keletkező összetett kondicionálisból mintegy láncszabállyal újabb tételt kapunk.

3. Tétel

Ha $\Gamma \Rightarrow A$, akkor $\Gamma \vdash A$.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy a **QC** teljes a **KL**-re nézve. Mivel korábban beláttuk már, hogy a **QC** emellett helyes is a **KL**-re nézve, azt is kijelenthetjük, hogy a **QC** és a **KL** adekvát egymáshoz, vagyis ami az egyikben levezethető, levezethető a másikban is. Ez a tétel azonban még nem jelenti azt, hogy azt is meg tudnánk mondatni, *mi* az, ami levezethető, és *mi* az, ami nem, vagyis minden konkrét formula esetében el tudnánk dönteni, hogy levezethető-e. A **KL** analitikus táblázata nem bizonyult minden esetben használható módszernek, és a **QC**-ben sincsen megfelelő univerzális eljárás.

5. A Peano aritmetika

(Tankönyv 142-147. oldal)

I. Bevezetés

Ebben és a következő fejezetben egy-egy olyan elmélet kerül szóba, amely a Tankönyv szavai szerint (142. oldal) „elfér a klasszikus elsőrendű logika keretei között”.

→» Mit jelent itt az „elfér” metafora? Hogyan „lóghatna túl” egy elmélet ezeken a kereteken?

A. Alapfogalmak

Elsőrendű elmélet: $E = \langle L, \Gamma \rangle$

Az elmélet *nyelve*: $L = \langle Log, Var, Con, Term, Form \rangle$ (Az elmélet attól elsőrendű, hogy L elsőrendű, vagyis *Var* csak individuumváltozókat enged meg.)

Az elmélet *posztulátumai* vagy *axiómái*: $\Gamma = Form$ egy zárt formulákból álló részosztálya. Ezeknek a státusza hasonlít az alapformulákéhoz. Azért különítik el őket mégis egy kalkulus alapformuláitól, mert más céllal vezetik be őket: nem egy logikai kalkulus kidolgozására szolgálnak, hanem egy tudományos diszciplína alapjaiként.

Az elmélet *alapfogalmai*: *Con* elemei.

Az elmélet *származtatott fogalmai*: *Con*-ból L segítségével, definíciókkal nyert fogalmak.

Az elmélet *tételei*: Γ logikai következményei. Mivel a **KL** és a **QC** adekvátak, ezért mindegy, hogy itt a következményrelációk közül melyiket használjuk. Egy elmélethez magához nem tartoznak hozzá a levezetési szabályok, így a következményreláció sem, csak a nyelv és az axiómák, de az elmélet működtetésénél használjuk őket. Némiképp távoli hasonlattal élve, az evolúcióelmélethez nem tartozik hozzá a logika, amelynek segítségével az elmélet alapbelátásaiból (axiómáiból) az ember és az emberszabású majmok közötti kapcsolatot kifejező állításokat levezetik.

Mivel ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$, a posztulátumok mindegyike tétele is az elméletnek. Bár levezethetők Γ-ból, levezetésükre, bizonyításukra nincs szükség, mert mint axiómák eleve „igazak”. Mivel a logikai igazságok tetszőleges formulának következményei, következményei Γ-nak is; ezért a logikai igazságok is tételei az elméletnek. Az elmélet *valódi tétele* az, aminek a levezetéséhez igénybe vesszük Γ-t is.

B. Az elméletek konzisztenciájának kérdése

Korábban láttuk, hogy egy formulaosztály akkor inkonzisztens, ha belőle az alapjául szolgáló nyelv bármely formulája levezethető. Egy elmélet konzisztens, ha a posztulátumainak osztálya konzisztens, vagyis Γ-jából nem lehet bármit levezetni, tehát soha nem fordul elő, hogy A és $\sim A$ egyaránt levezethető. Az elméletek konzisztenciájának ellenőrzése nem könnyű feladat, mert nincsen rá univerzális eljárás. Ugyanakkor, ha nem lehetünk biztosak benne, hogy elméletünk konzisztens, semmilyen levezetett tételt nem kell megbízhatónak tartanunk, mert az inkonzisztens elméletekből bármi levezethető.

Negációteljeseknek mondjuk azokat az elméleteket, amelyekben bármely formula bizonyítható (levezethető) vagy cáfolható. Vagyis ahol ($\Gamma \vdash A$) *vagy* ($\Gamma \vdash \sim A$) fönnáll.

→» Kizáró vagy megengedő értelemben (alternáció) szerepel itt a „vagy”? Miért?

Látható, hogy a negációteljesség és az inkonzisztencia nem azonos fogalmak, hiszen inkonzisztensnek azt az elméletet mondjuk, ahol ($\Gamma \vdash A$) *és* ($\Gamma \vdash \sim A$) fönnáll. Viszont ami inkonzisztens, az negációteljes.

→» Magyarázza el, miért írja a Tankönyv a 142. oldalon: „Világos, hogy negációteljesség csak a konzisztens elméletek esetén érdekes tulajdonság.”

A tudományos érdek azt kívánná, hogy konzisztens és negációteljes elméletekkel rendelkezzünk, tehát, hogy az elméletben felmerülő minden kérdésre választ tudjunk adni (minden tételről eldönthessük, hogy következik-e az elméletből). Gödel eredményeivel megismerkedve mégis azt fogjuk találni, hogy elméleteink jelentős része nem felel meg ennek a kívánalomnak.

A következőkben a Tankönyv 143. oldalán idézett gödeli tételt próbáljuk lépésről-lépésre belátni, az itt betoldott számozást követve:

„Vannak olyan elsőrendű matematikai elméletek, (II)

amelyek ha konzisztensek, (V)

nem lehetnek negációteljesek, (III)

és semmiféle konzisztens bővítéssel nem tehetőek negációteljessé, azaz gyógyíthatatlanul inkomplettek e tekintetben. (IV) *”*

II. A Peano aritmetika

A konzisztens, de nem negációteljes elmélet példája a következőkben a Peano aritmetika lesz, amelyet a fent bemutatott módon adunk meg.

$P = \langle L^{\mathrm{P}}, \Gamma_{\mathrm{P}} \rangle$

L^{P} értelmezésében a korábban L-ről, mondottakra támaszkodhatunk. Nemlogikai konstansai:

$Con_P = \langle 0, ', +, \times \rangle$

0: név (a nulla neve)

’: egyargumentumú névfunktor: egy számból az eggyel nagyobb számot képzi (az argumentuma után írjuk)

+, ×: az összeadás és a szorzás kétargumentumú névfunktorai (az argumentumok közé írjuk)

Γ_{P}, vagyis a posztulátumok osztálya:

(P1) $\forall x{\sim}(x' = 0)$

(P2) $\forall x \forall \mathrm{y}[(x' = y') \supset (x = y)]$

(P3) $\forall x(x + 0 = x)$

(P4) $\forall x \forall \mathrm{y}[x + \mathrm{y}' = (x + y)']$

(P5) $\forall x(x \times 0 = 0)$

(P6) $\forall x \forall y[x \times y' = (x \times y) + x]$

(P7) $[A^{0/x} \,\&\, \forall x(A \supset A^{x'/x})] \supset \forall x A$

Kommentárok

(P1)-et átalakítva ezt kapjuk: ${\sim}\exists x(x' = 0)$. Nincs olyan szám (x), amelynek követője (x') a 0 volna.

(P2)-t kontraponálva ezt kapjuk: $\forall x \forall y[{\sim}(x = y) \supset {\sim}(x' = y')]$ Egyszerűbben: $\forall x \forall y[(x \neq y) \supset (x' \neq y')]$ Ha két szám különbözik, akkor különböznek azok a számok is, amelyek követik őket.

(P3): A $x + 0$ kifejezést zárójelbe is tehetjük, de ez nem szükséges, hiszen a + névfunktor, csak a két argumentumával egybeolvasva ad olyan nevet, amely az azonosságpredikátum argumentuma lehet. Aki előbb egybeolvasná, hogy $0 = x$, majd ehhez akarná hozzáadni az x-et, az a + második argumentumaként nem nevet, hanem mondatot szerepeltetne. Hasonló mondható pl. **(P5)-**ről is.

(P4): A Tankönyv magyarázatának megértéséhez olvassuk az azonosságrelációt jobbról balra!

(P7) nem formula, hanem séma: ha valami (egy származtatott fogalom) igaz a 0-ra, és öröklődik, akkor minden számra igaz.
(Figyelem! A Tankönyvben a **(P7)** hibás. Első zárójelét az utolsó kondicionális előtt be kell zárni.)

→» Mutassa ki, hogy a **(P7)** posztulátum akkor is érvényes, ha *x*-nek nincs szabad előfordulása *A*-ban!

III. A Peano aritmetika nem negációteljes (feltéve, hogy konzisztens)

Gödel eredetileg nem a Peano aritmetikáról mutatta ki, hogy nem negációteljes, hanem egy azt is magában foglaló másodrendű elméleten, de tétele minden *P*-t tartalmazó elméletre érvényes.

A. Egy nevezetes formula

A./a. Gödel számok

• Rendeljünk a nyelv minden kifejezéséhez természetes számokat (*G*-számok)! Először a logikai, aztán a nem logikai konstansokhoz, aztán az ezekből képezhető formulákhoz, végül, a formulák láncolatából álló levezetésekhez.

• A formulák *G*-számát bonyolult szabályok szerint képezzük. Ha pl. *A*, *B* és ⊃ *G*-száma rendre *a*, *b*, *c*, akkor a Tankönyv 144. oldala szerint ($A \supset B$) *G*-száma $2^c \times 3^a \times 5^b$.

Magyarázat. Az egyes tagok előre definiált *G*-számát a formulában elfoglalt helyüknek megfelelően valamelyik törzsszám (prímszám) kitevőjévé tesszük, kezdve az elsővel (2), majd kihagyás nélkül az egyre nagyobbakkal (3, 5), és a kitevős tagokat összeszorozzuk. A Tankönyvben a kondicionális jelének azért 2^C felel meg, mert (ha nem elírásról van szó), a $A \supset B$ formulát a számozás kedvéért prefix írásmódúra formálta át, vagyis a funktort kiemelte az argumentumai elé. (Ameddig a formulák írásmódja következetes és átlátható szabályokon nyugszik, bármilyen eljárás megengedett.)

• A szorozat jellemző az egész kifejezésre, és törzstényezős felbontással egy kifejezés *G*-számából megállapítható a kifejezés szerkezete. (Például: $1350 = 2^1 \times 3^3 \times 5^2$)

• A kitevőkben nagyon nagy számok lehetnek, amelyek további törzstényezős felbontása az általuk jellemzett tag belső szerkezetét definiálja.

• *G*-számokat rendelhetünk a levezetésekhez is, mert minden levezetés olyan formulákból áll, amelyek egymáshoz képesti sorrendje kötött. Az első formula *G*-száma a 2 kitevője lesz, a másodiké a 3 kitevője, stb. A kitevős számok összeszorzásával kapjuk a levezetés *G*-számát.

Gödel eredeti fejtegetései nehezen követhetőek. Ennek megfelelően a szakirodalomban az ő alapelveihez hűségesen, de jelöléseit nem mindig követve különböző módokon mutatják be a Gödel számozást. A következőkben szemléltetés- és gyakorlásképpen E. Nagel – J. R. Newman: *A Gödel-bizonyítás* című tanulmányát[1] idézve tekintünk át néhány példát.

A különböző jelek Gödel számai:

Jel	***G*-szám**
Logikai konstansok, névkonstansok	
~	1
∨	2
⊃	3
∃	4
=	5
0 (nulla)	6
’ (követője)	7
(	8
)	9
, (írásjel)	10
Mondatparaméterek: Mindegyiket egy hárommal osztható és tíznél nagyobb szám jelöli.	
p	12
q	15
r	18
Változók: Mindegyiket egy olyan 10-nél nagyobb szám jelöli, amelynek, ha hárommal osztjuk, a maradéka 1.	
x	13
y	16
z	19
Predikátumparaméterek: Mindegyiket egy olyan 10-nél nagyobb szám jelöli, amelynek, ha 3-mal osztjuk, a maradéka 2.	
F	14
G	17
H	20

Példák

1. Hogyan határozzuk meg egy formula G-számát?

$(\exists x)(x = y')$ (≈ minden számnak van rákövetkezője ≈ egyik sem a legutolsó szám)

A képletben előforduló tíz jel *G*-száma a táblázat alapján rendre:

8, 4, 13, 9, 8, 13, 5, 16, 7, 9

[1] In I. M. Copi – J. A. Gould [Szerk.]: *Kortárs tanulmányok a logikaelmélet kérdéseiről*. Budapest, Gondolat, 1985. 70-103. Más számozási mechanizmust tulajdonít Gödelnek például: W. Kneale – M. Kneale: *A logika fejlődése*. Budapest, Gondolat, 1987. 666-676.

Az első tíz prímszám:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

A formula *G*-száma:

$2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{16} \times 29^9$

→» Adja meg azt a *G*-számot, amely a $\forall xFx$ kifejezésnek feleltethető meg. (Segítség: A fenti táblázatra alapuló számozáskor az univerzális kvantort definícióval kell bevezetni.)

2. Hogyan állapítjuk meg egy számról, hogy G-szám-e, és ha igen, melyik formulát jelöli?

a) *G*-szám-e a 100?

$100 = 2^2 \times 5^2$. Tehát 100 nem osztható hárommal, vagyis olyan formulát kellene, hogy jelentsen, amelynek nincsen második tagja, csak első és harmadik, ám ez lehetetlen, ezért a 100 nem *G*-szám.

b) *G*-szám-e a 243000000?

$243000000 = 2^6 \times 3^5 \times 5^6$. Ez a szorzat formailag helyes, vagyis *G*-számot jelöl.

Olyan formulát jelöl, amelynek három tagja van, az első és az utolsó tag azonos, és *G*-számuk egyaránt 6; ez a jel a fenti táblázat szerint a 0, a második tagjának *G*-száma 5, ez pedig az =.

A 243000000 tehát azt jelenti: 0 = 0

3. Hogyan képezzük egy levezetés G-számát?

Legyen a levezetés kéttagú:

1. $\sim p \vee q$
2. $p \supset q$

Az első sor *G*-száma: $2^1 \times 3^{12} \times 5^2 \times 7^{15}$. Jelöljük ezt a számot *m*-mel!

A második sor *G*-száma: $2^{12} \times 3^3 \times 5^{15}$. Jelöljük ezt a számot *n*-nel!

A levezetés *G*-száma ekkor: $2^m \times 3^n$

A./b. A szintaxis aritmetizálása

• Nagyon nagy számokkal dolgozva az L^p nyelv miden elemét egyértelműen definiálhatjuk.

• Az eljárás kiterjeszthető a metanyelvre is. Az „*A* egy formula” metanyelvi állítás lefordítható úgy, hogy megadjuk az *A* formula *G*-számát, amelyből kiderül például, hogy itt nem egy logikai konstansról, hanem egy formuláról van szó. Az „*A* formulában van egzisztenciális kvantor” elmondható úgy, hogy kijelentjük, a formula *G*-száma osztható egy hatványozott prímszámmal, amely hatványkitevőjében az ∃ *G*-számát tartalmazza, de nem osztható e prímszám magasabb hatványával.

→» Hogyan lehetne az *A* formula *G*-számáról tett állítással elmondani, hogy az *A* formulában egzisztenciális kvantor hatókörében egzisztenciális kvantor szerepel?

• Gödel kimutatta, hogy az összes aritmetikai kifejezés effektíve (egyetlen, véges módon leírható eljárással) kiszámítható, *kivéve* a Γ_P- ből való levezethetőség predikátumát.

→» Ha ez is „effektíve kiszámítható lenne, akkor az elmélet minden formulájáról eldönthető lenne, hogy tétele-e az elméletnek” (Tankönyv 145. oldal). Miért? Mit mondhatnánk akkor az elmélet negációteljességéről?

A./c. Diagonalizálás

• Definiáljuk a háromargumentumú *G* predikátumot! $G(a)(b)(c)$ argumentumai nevek, mégpedig számok nevei:

a: egy *formula G-szám*a (Például az $F(x)$ formula *G*-száma)

b: egy közönséges *szám*, amelyet az *a* *G*-számú formulában az *x* változó helyére írunk. (Az előbbi példát folytatva: így $F(b)$ keletkezik) A behelyettesítéssel keletkező formulának a *G*-száma már nem *a*, hiszen az *a* *G*-számú formula megváltozott a behelyettesítés által, és *a* nem jelölhet egyszerre két formulát.)

c: az így létrejövő formula Γ-ból való *levezetésének G-száma.* (Példánk szerint*:* az $F(b)$ levezetésének *G*-száma) A *c* sem azonos $F(b)$ *G*-számával. Erről a számról az $G(a)(b)(c)$ semmit nem mond).

→» Szerepel-e a *c* G-számú levezetésben az *a* G-számú formula?

• $G(a)(b)(c)$ jelentése: „Az *a* *G*-számú formulába *x* helyére *b*-t írva azt a formulát kapjuk, amelynek levezetésének *G*-száma *c*.” Ebből a (szám)neveket kihagyva megkapjuk *G* jelentését.

→» A Tankönyv a 145. oldalon némiképp más jelentést ad: „*c* egy (Γ_P-ből való) levezetés *G*-száma, e levezetés utolsó tagja az a formula, amelyet az *a* *G*-számú formulából úgy kapunk, hogy az *x* változótót *b*-vel helyettesítjük.” Vizsgálja meg, ugyanazt mondja-e a két meghatározás!

• Jelölje A_a az *a* *G*-számú formulát! A_a nem egy argumentummal ellátott predikátum, amit az is jelez, hogy a Tankönyv nem $A_{(a)}$ vagy még inkább $A(a)$ alakban írja. (Ha *A*-t mégis predikátumnak akarnánk tekinteni, ezt jelentené: „Az a formula *vagyok*, amelynek a *G*-száma…”

→» Mit jelentene ebben az esetben maga az A_a?)

• Ekkor $A_a^{b/x}$ az a formula, amelyik levezetésének a G-száma c.

→» $G(a)(b)(c)$, illetve a benne szereplő névkonstansok jelentése alapján magyarázza el, miért c az $A_a^{b/x}$ formula levezetésének G-száma!

$A_a^{b/x}$ egyszersmind olyan A_a-ból, tehát olyan a G-számú formulából keletkező formula, amelynek G-száma már nem a.

→» Mit tudunk az $A_a^{b/x}$ formula G-számáról?

A $^{b/x}$ kitevő tehát nem A_a belső szerkezetéről árul el valamit, hanem azt mondja meg, hogy milyen változásment végbe A_a belsejében ahhoz, hogy $A_a^{b/x}$ létrejöhessen. $A_a^{b/x}$ tehát egy olyan *ismeretlen* G-számú formula, amelyben a alsó index a formula eredetéről, a b pedig a származtatás módjáról szól.

→» Mint mond a kitevő arról, hogyan származott az $A_a^{b/x}$ formula az A_a formulából?

• Ha ki lehet mondani egy $G(a)(b)(c)$ szerkezetű konkrét mondatot, *vagyis* ha meg lehet mondani azt is, hogy melyik számot jelenti 'c', *vagyis* ha meg lehet mondani, melyik levezetés vezet az $A_a^{b/x}$ formulához, akkor az $A_a^{b/x}$ formulának van levezetése.

→» Magyarázza el, miért mondja a $G(a)(b)(c)$ formula azt, hogy az $A_a^{b/x}$ formulának *van* levezetése!

• Készítsünk egy táblázatot: egymás alá kerüljenek az egyre nagyobb G-számú formulák! Balról jobbra pedig úgy haladjunk, hogy az x helyére mindig egyre nagyobb szám kerüljön!

	Egyre nagyobb b →				
Egyre	$A_1^{1/x}$	$A_1^{2/x}$	$A_1^{3/x}$	$A_1^{4/x}$	…
nagyobb	$A_2^{1/x}$	$A_2^{2/x}$	$A_2^{3/x}$	$A_2^{4/x}$	…
a	$A_3^{1/x}$	$A_3^{2/x}$	$A_3^{3/x}$	$A_3^{4/x}$	…
↓	$A_4^{1/x}$	$A_4^{2/x}$	$A_4^{3/x}$	$A_4^{4/x}$	…
	…	…	…	…	$A_5^{5/x}$

Az $A_a^{a/x}$ szerkezetű formulákat a táblázatban való elhelyezkedésük miatt diagonális formulának nevezzük. Úgy jönnek létre, hogy nyitott (szabad x változót tartalmazó) formulákba rendre azt a számot helyettesítjük be a változó helyére, amely a formula G-száma. A továbbiakban a diagonális formulákról lesz szó.

A./d. Az eldönthetetlen formula (amelyet se bizonyítani, se cáfolni nem lehet)

α Tekintsük a következő formulát:

$$\textbf{(1)} \qquad \forall z \sim G(x)(x)(z)$$

Ez egy egyváltozós nyitott formula: csak z-re nézve zárt. (Előrebocsáthatjuk: Az, hogy ez nyitott formula, azt jelenti, hogy nem fejez ki állítást.)

Most több lépéses kísérletet teszünk e formula kiolvasására.

Mivel **(1)** ekvivalens ezzel: $\sim\exists zG(x)(x)(\mathrm{z})$, a kiolvasás így kezdődik: Nincs olyan z, ami annak a levezetésnek a G-száma, hogy … Vagy másképpen Nincs levezetése annak, hogy…

Magyarázat. Ha egy levezetésnek nincs G-száma, akkor az a levezetés *nem létezik*, mert a levezetés nem más, mint egy formulasorozat, amelynek első tagja egy vagy több axióma, utolsó tagja a levezetendő formula, viszont minden létező formulasorozathoz definiálható G-szám.

(A kiolvasásként megadott félmondatok, összhangban azzal, hogy **(1)** nyitott formula, valóban nem állítások. Ha be akarnánk fejezni őket, x-be ütköznénk, ami megakadályozná, hogy valami határozottat állítsunk. Mivel x változó, nem tudjuk megmondani, minek nincs levezetése.)

• Vizsgáljuk meg, hogy minek nincs levezetése? Egy közelebbről meg nem határozott formulának, amelyet akár levezetetlen formulának is hívhatunk. Meghatározatlan e formula, mert nincs megadva, hogy miből jött létre (első x helyén kellene állnia egy konkrét formula-őst jelölő konkrét számnak), és az sem, hogy hogyan jött létre (második x helyén kellene állnia annak a konkrét számnak, amelyet a formula-ősben a szabad változók helyére helyettesítettünk), tehát az sincs meghatározva, hogy mi történt a változóival.

> →» Az iménti mondatban némiképp leegyszerűsítő módon formula-ősben levő szabad változókról esett szó. Lehetnek-e ezek a változók x-ek, vagy lehetnek-e mások, mint x-ek? És ha x-ekről van itt szó, akkor „ugyanazokról”, mint amelyek az **(1)**-ben vannak?

Magyarázat. Fontos, hogy a G predikátum első argumentuma a levezetetlen formula „alaki ősének” a G-számát adná meg, tehát nem annak a formulának, amely esetleges logikai levezetésében közvetlenül megelőzné, hanem annak, amelyből behelyettesítéssel nyerhető. Amikor azt mondjuk, hogy „nincsen levezetése”, nem azt mondjuk, hogy nincsen olyan formula, „alaki ős”, amelyből létrehozható, hanem azt, hogy nem létezik az a formulasorozat, amely az elmélet posztulátumaival kötné össze a levezetetlen formulát.

• Az **(1)** formula formálisan így olvasható ki: Nem igaz, hogy van olyan z, ami annak a levezetésnek a G-száma, amelynek záró tagja az a formula, amelyet úgy nyerünk, hogy az x G-számú formulában („alaki ősben”) x helyére x-et helyettesítünk, vagyis nem csinálunk semmit. (Ez a mondat természetesen nem állítás.)

• Itt egy $A_x^{x/x}$ (= A_x) formula levezethetetlenségéről van szó.

→» Korábban volt szó róla, hogy $A_a^{b/x}$ és A_a nem ugyanaz. Most mégis két olyan formulát azonosítunk, amelyek alakjukban hasonló módon különböznek. Miért tehetjük ezt meg?

Mivel az A_a szimbólum az *a* *G*-számú formulát fejezi ki, ezért **(1)**-et, amelyben *x* *G*-számú formuláról esik szó, így is kiolvashatjuk: Nincs levezetése az A_x formulának.

→» Nem feledkezik meg ez a kiolvasás az $^{x/x}$ kitevőről?

(Ez továbbra sem állítás, mert nem mondja meg, hogy minek nincs levezetése, hiszen az A_x „formula” nem egy konkrét formula, hanem „egy bizonyos” formulát jelent, amelynek konkrét megnevezése *x* étékének megadásával volna lehetséges. (*x* itt nem argumentum. Ha az volna, akkor A_x is formula, nyitott formula volna.) A_x az **(1)** mondat kiolvasásában név-jellegű valami, amely *x* megadásával tulajdonnévvé válna, addig azonban maga is csak változó.)

• Az **(1)** formula egy (nyitott) formula, és mint minden formulának, rendelkeznie kell *G*-számmal. Legyen ez a szám: *g*

• Ez a *g* egyértelműen azonosítja **(1)**-et, hiszen a *G*-számok feladata éppen az, hogy egyértelműen azonosítsák a formulákat. Tehát *g* **(1)** neve. Mivel A_g jelentése nagyjából ez: „az a formula, amelynek *G*-száma *g*”, az A_g is **(1)**-et jelenti.

→» Úgy tűnik, most már három neve is van a $\forall z{\sim}G(x)(x)(z)$ formulának: **(1)**, *g* és A_g. Lehetséges ez?

β Most helyettesítsünk **(1)**-ben *x* helyére *g*-t!

$$\textbf{(2)} \qquad \forall z{\sim}G(g)(g)(z)$$

Mivel ez ekvivalens azzal, hogy ${\sim}\exists zG(g)(g)(z)$, kiolvasása így kezdődhet: Nincs levezetése annak a formulának, hogy…

• Mit tudunk erről a nem levezethető formuláról? Azt, hogy $A_g^{g/x}$ alakú. Az alsó index elmondja, hogy egy *g* *G*-számú formulából jött létre. A felső pedig azt, hogy úgy jött létre, hogy a *g* *G*-számú formulában *x* szabad előfordulásait *g*-vel helyettesítettük be.

• Összefoglalva a **(2)** kiolvasásáról mondottakat: Nem lehet levezetni azt a formulát, amely egy *g* *G*-számú formulából, úgy jön létre, hogy benne az *x* változókat *g*-vel helyettesítjük.

• Csakhogy **(2)** éppen így jött létre! Hiszen **(1)**-ből jött létre, amelynek *G*-száma éppen *g*; továbbá úgy jött létre **(1)**-ből, hogy abban az *x*-eket *g*-vel helyettesítettük.

→» Mivel kulcsfontosságú a fejezet gondolatmenetének megértése szempontjából, igazolja saját szavaival a Tankönyv 145. oldalának kulcsmondatát: „(2) maga az $A_g^{g/x}$ formula”!

• Vagyis **(2)** önmagáról beszél, és azt mondja önmagáról, hogy ő nem levezethető. (Itt az önmagára referálás ártatlan esetéről van szó, amely nem okoz olyan gondokat a logikában, mint az „Ez a mondat hamis” jellegű kifejezések. Ezek egy jelentés kifejezése helyett saját jelentésükről akarnak valamit mondani, ezért nincs jelentésük. Semmi baj azonban azzal, ha azt mondom, „Ez a mondat, amit éppen mondok, kilenc szót tartalmaz.” **(2)** sem a saját igazságértékéről, hanem saját (szerkezetéről és) levezetéséről szól.)

→» Mivel kulcsfontosságú a fejezet gondolatmenetének megértése szempontjából, magyarázza el részletesen, miért állítja a $\forall z{\sim}G(g)(g)(z)$ formula, hogy „Én nem vagyok levezethető”!

→» Működne-e „Az eldönthetetlen formula” című rész gondolatmenete akkor is, ha **(1)** nem abban a formában szerepelne benne, mint ahogyan szerepel, hanem egyik vagy másik x már be lenne benne helyettesítve g-vel? Miért?

B. Levezethető-e Γ_P -ből (2) (feltéve, hogy Γ_P konzisztens)?

• Ezt a kérdést nem lehet azzal megválaszolni, hogy arra hivatkozunk, hogy **(2)** saját levezethetetlenségét állítja, hiszen **(2)** akár hamis is lehet. Gödel viszont megmutatta, hogy ha **(2)** levezethető, akkor a negáltja is levezethető. **(2)** levezethetősége esetén tehát a Peano aritmetika nem lenne konzisztens. Ha ugyanis azt gondoljuk, hogy a Peano aritmetika konzisztens (erről a kérdésről az alábbi V. alfejezet beszél), akkor nem fogadhatjuk el, hogy **(2)** levezethető, mert így egyben ~**(2)** is levezethető lenne, és ezzel máris a Peano aritmetika inkonzisztenciájához jutnánk, pedig éppen az ellenkezőből indultunk ki.

→» Arra jutottunk tehát, hogy **(2)** nem levezethető a vizsgált elméletből, a Peano aritmetikából. Ugyanazt jelenti-e ez, mint a Tankönyv 145. oldalon olvasható megfogalmazása: „A **(2)** formula nem tartozik **P** tételei közé”? Ezt az állítást a Tankönyv a „következésképpen” szóval vezeti be. Magyarázza el, hogyan következik a megelőző mondatból?

• Ezzel elérkeztünk a III. alfejezet fő témájához, a negációteljesség kérdéséhez. Attól még, hogy egy kifejezés egy elméletben nem levezethető, az elmélet lehet negációteljes. Hiszen ha

(2) nem is, de talán a negáltja, ~**(2)** levezethető. És talán ~**(2)** levezethetőségéből nem következne **(2)** levezethetősége (vagyis az inkonzisztencia).

• Csakhogy **(2)** igaz állítást fejez ki. Azt mondja, hogy ő nem vezethető le, és valóban nem vezethető le (legalábbis akkor, ha a Peano aritmetika konzisztens, amit itt végig feltételezünk).

• Ha pedig **(2)** igaz, akkor ~**(2)** hamis.

• Így ha ~**(2)** levezethető lenne, akkor valami hamisból kellene levezetni, mert igazból logikailag soha nem következik hamis, hiszen a következményreláció igaz premisszák esetén igaz konklúziót ad, az igazságot örökíti tovább. Mivel Γ_{P} tagjai definíció szerint igazak, belőlük ~**(2)** nem vezethető le.

• Mivel tehát sem **(2)**, sem ~**(2)** nem vezethető le (mindkettő eldönthetetlen), ezért a Peano aritmetika nem negációteljes, feltéve, hogy konzisztens. Ez az eredmény felel meg a híres Gödel-tételek közül az elsőnek.

→» Magyarázza el, mi az összefüggés az eldönthetetlen formula és a negációteljesség között!

IV. A peaono aritmetika menthetetlenül inkomplett

Arra jutottunk, hogy a Gödel által vizsgált elméletben (és minden elméletben, amelynek része a Peano aritmetika) van eldönthetetlen formula, amelyiket nem lehet levezetni az elméletből, ráadásul olyan eldönthetetlen formulát is találtunk, amely igaz. Mivel mind a **KL**-ben, mind a **QC**-ben egy formulaosztályból bármely tagja következik, úgy tűnhet, elég lenne ~**(2)**-t felvenni az elmélet posztulátumai közé, és akkor ez a formula levezethetővé, az elmélet pedig negációteljessé válna.

→» Ugyanerre a célra **(2)**-nek a posztulátumok közé való felvétele semmiképpen nem felelne meg. Honnan tudjuk ezt?

Csakhogy Gödel kimutatta: ha Γ_{P}-t kibővítenénk is bármilyen további axiómával, akkor is lehetne benne egy *G*-hez hasonló *G*’ predikátumot definiálni, ami ismét eldönthetetlen formulát eredményezne.

V. Konzisztens-e A Peano aritmetika?

A. Ontológiai megközelítés

• Egy elmélet konzisztens, ha kielégíthető, tehát ha van modellje, vagyis ha van olyan interpretáció, amely minden posztulátumát igazzá teszi. Ekkor még hamis tétele sem lehet, nemhogy ugyanaz a tétel lehetne igaz is, és hamis is.

→» „konzisztens, ha kielégíthető" – itt a szintaktikai és a szemantikus felépítésű logika centrális fogalmai kerültek egymás mellé, amelyeket már a QC teljességéről szóló fejtegetések is összekapcsoltak. Miben egyeznek meg, és miben különböznek ezek a fogalmak?

→» Milyen ontológiai okai vannak annak, hogy egy inkonzisztens elméletnek nem lehet modellje?

→» Miért nem fordulhat elő, hogy az elmélet inkonzisztens vagy hamis tételei vannak, ha a posztulátumok együttesen is interpretálhatók igazként?

• A Peano aritmetikának van modellje, mégpedig a természetes számok osztálya, tehát P konzisztens. Csakhogy minden modell interpretáció. Minden interpretáció egy tárgyalási univerzumot foglal magában (Vö.: $IP = \langle U, \Phi\rangle$), amelyben individuumok vannak. *Léteznek-e* azonban a természetes számok? Ez nem logikai, hanem ontológiai kérdés, a mi kérdésünk viszont, P konzisztenciájáról logikai, és a logikán belül szeretnénk megválaszolni.

B. Logikai megközelítés

• Le kell tehát vezetni, hogy P konzisztens. *Vagyis* azt kell levezetni, hogy P-ből nem vezethető le minden formula. Hiszen egy elmélet inkonzisztenciája azt jelenti, hogy bármely tetszőleges B formula levezethető belőle.

• Az a levezetendő metanyelvi mondat, hogy „Van olyan formula, amely nem vezethető le Γ_P-ből", Gödel módszerével aritmetizálható. Nevezzük el az aritmetikai formuláját $Cons_P$-nek! Ez a formula P konzisztenciáját fejezi ki.

• A $Cons_P$ formula és a neki megfelelő mondat talán igaz, és ha igaz, akkor a P elmélet konzisztens. Csakhogy mi ezt bizonyítani is szeretnénk, így még azzal sem elégedhetünk meg, ha $Cons_P$ *történetesen* igaz, hanem ezt le is kell vezetnünk. De vajon levezethető-e Γ_P-ből $Cons_P$, vagyis az az állítás, hogy van olyan formula, amely nem vezethető le Γ_P-ből? Gödel kimutatta, hogy ha $\vdash Cons_P$, akkor $\vdash$ **(2)**. De korábban már láttuk, hogy ha $\vdash$ **(2)**, akkor $\vdash$ ~**(2)**.

Tehát ha *levezethető* a *P* elméletből az elmélet konzisztenciáját kifejező mondat, akkor az elmélet nem konzisztens.

• Ha tehát *P* konzisztens, ezt nem tudja magáról bebizonyítani, csak kijelenteni. Ez a kijelentés ettől még lehet igaz, mert (ahogy Tarski is kimutatta[2]) egy elméletben több igaz mondat fogalmazható meg, mint bizonyítható.

• Ezért a Peano aritmetika konzisztenciáját csak kívülről lehet bizonyítani, a konzisztenciáját kifejező mondat magának a Peano aritmetikának nem tétele. Ez az eredmény felel meg a híres Gödel-tételek közül a másodiknak.

→» Vajon nem feleslegesen fáradozott, és végül nem tévedett-e Gödel, amikor a Peano aritmetika konzisztenciájának kérdésével foglalkozott? Hiszen úgy tűnik, a Peano aritmetika konzisztenciája egész egyszerűen bizonyítható az alábbi két következtetés segítségével.

Premissza: Ha valami inkonzisztens, akkor negációteljes.
Premissza: *P* nem negációteljes.
Konklúzió: *P* nem inkonzisztens.

Premissza: *P* nem inkonzisztens.
Premissza: Ha valami nem inkonzisztens, akkor konzisztens.
Konklúzió: *P* konzisztens.

Sőt, úgy tűnik, a Peano aritmetika konzisztenciája még ennél is egyszerűbben bizonyítható: Ha *P* konzisztens, akkor nem vezethető le belőle minden formula. Korábban viszont alaposan megvizsgáltuk **(2)** levezethetőségét, és negatív eredményre jutottunk, vagyis találtunk egy nem levezethető formulát. Tehát *P* konzisztens.

VI. Gödel nemteljességi tételei

„Minden olyan formalizált axiomatikus S elméletben, amely tartalmazza az elemi aritmetika elegendő részét, van olyan G_S mondat, hogy ha S konzisztens, akkor G_S igaz, de bizonyíthatatlan S-ben (Gödel első tétele), és ugyanez áll arra a $Cons_S$ mondatra is, amely az S

[2] Alfred Tarski: Igazság és bizonyítás. In Alfred Tarski: *Bizonyítás és igazság*. Budapest, Gondolat, 1990. 365-390.

elmélet konzisztenciáját kifejező állítás természetes formalizáltjának tekinthető (Gödel második tétele).”[3]

→» Gödel második tételének (a Tankönyvtől eltérő) megfogalmazását úgy kezdtük, hogy *„és ugyanez áll…”*. Pontosan mi az az „ugyanez”? Fogalmazza meg szabatosan a második tételt anélkül, hogy közben az elsőre hivatkozna!

[3] Stanisław Krajewski: A Gödel-tétel filozófiai következményei. In *Tertium non datur. Logikai-metodológiai tanulmányok* 2. 1985. 231-237.

6. Halmazelmélet: osztályok és halmazok

(Tankönyv 147-154. oldal)

I. Bevezetés

A halmazelmélet a logikai szemantika segédtudományaként fogható fel, hiszen a logikai szemantika olyan halmazelméleti fogalmakkal dolgozik, mint a terjedelem, az igazságtartomány vagy a tárgyalási univerzum.

A. Osztály, halmaz, halmazelmélet

Szemléleti alapgondolat: az osztályokba sorolás iterálható.
Iteráció: ugyanannak az eljárásnak az ismétlése
A halmazelmélet esetében az *első lépés:* individuumokat sorolunk osztályokba. Például egyargumentumú predikátum terjedelmének minősítjük őket.
A második, ismétlő lépés: az így kapott osztályokat újra csak individuumoknak tekintjük, és egy immár osztályokat (is) tartalmazó nagyobb osztály elemeinek nyilvánítjuk őket.

Ontológiai kérdés: Individuumok-e az osztályok? Entitások-e? Léteznek, vannak-e? Ha igen, milyen értelemben. Az osztályok mibenlétével való számvetés logikai tanulmányaink során eddig kikerülhető volt. Nem kellett individuumként kezelni az osztályokat, nem kellett őket létezőknek tekinteni. Nem azt mondtuk, hogy a kutyák osztálya nagy, hanem azt, hogy sok individuumra igaz a „kutya" predikátum. Ha azonban az osztályokat más osztályok elemeinek tekintjük, akkor már individuumként, *valami*ként gondolunk rájuk.

Halmaz: Olyan osztály, amely eleme lehet más osztálynak. Olyan osztály, amely egy predikátum terjedelmébe tartozhat, amelyről *mint individuumról* lehet predikátumokat állítani. Mivel osztályba csak individuumokat lehet sorolni, ezért a halmaz: *individualizálható osztály*. Tagjai szempontjából a halmaz *összesség*, egy nagyobb összesség szempontjából *individuum*.
Halmazelmélet: Olyan elsőrendű elmélet, amelynek egyik alapvető kérdése, hogy melyik osztályok individualizálhatók, mely osztályok lehetnek osztályok elemei. Arra fogunk jutni, hogy *minden halmaz osztály, de nem minden osztály halmaz.*

B. A halmazelmélet egy lehetséges kiépítése a matematikában

Tárgyalási univerzum: csak halmazokat tartalmaz.

Szabad változók: értékei csak halmazok lehetnek.

Egyetlen nemlogikai konstans: $\in$

A logikai konstansok közül gyakorta elhagyják az azonosság jelét, és definícióval vezetik be:

$$a = b \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)]$$

Kiolvasás: Két halmazt azonosnak mondunk, ha minden dolog akkor és csak akkor eleme az egyikek, ha eleme a másiknak is. (Ha azonosak az elemeik.)

Alapsémák: Elhagyják az **(A7)**: ($\mathbf{x} = \mathbf{x}$) és az **(A8)**: $(x = y) \supset (A^{x/z} \supset A^{y/z})$ alapsémákat, mivel ezekben szerepel az azonosságpredikátum. Az **(A7)** levezethető az azonosság definíciójából. Az **(A8)** levezethető az ún. *extenzionalitási axiómá*ból:

$$(a = b) \supset \forall x[(a \in x) \supset (b \in x)]$$

Kiolvasás: Ha a azonos b-vel, akkor minden *halmazról* elmondhatjuk, hogy ha a eleme ennek a halmaznak, akkor b is eleme.

Az extenzionalitási axióma és **(A8)** kapcsolatának feltárásához fogalmazzuk át **(A8)-**at!

$$(x = y) \supset [F(x) \supset F(y)]$$

Kiolvasás: Ha két dolog azonos, akkor amennyiben egy predikátum igaz az egyikre, igaz a másikra is.

Az extenzionalitási axiómában ehhez képest annyi a különbség, hogy ott x szerepében a, y szerepében b, F szerepében pedig „…∈ x” szerepel. Az extenzionalitási axióma univerzális kvantora azt fejezi ki, hogy a és b azonosságához az kell, hogy *bármelyik* halmaznak egyszerre legyenek elemei. **(A8)**-ban hasonló hatású, hogy egy variábilis tartalmú F predikátumot (valójában predikátumváltozót) szerepeltetünk.

→» Mi motiválhatta az *extenzionalitási* axióma elnevezést?

C. A halmazelmélet kiépítésének jelen tárgyalásban követendő alapelvei

Tárgyalási univerzum (individuumtartomány): nem csak halmazok, hanem más objektumok is szerepelnek benne.

Definíció: Azokat az individuumokat, amelyek nem halmazok, *ősobjektum*oknak (röviden ősoboknak) mondjuk.

Ezen ősoboknak tehát két definitív tulajdonsága van: individuumok és nem halmazok. Bár ez definíciójukban explicite nem szerepel, előrebocsáthatjuk, hogy az ősoboknak nincsenek elemeik. Ezt a tényt majd a **(H0)** posztulátumból fogjuk levezetni.

Az *osztályok* nem részei a tárgyalási univerzumnak, mert az osztály nem *„valami"*. Azok az osztályok, *amelyek nem halmazok*, de a halmazelméletben mégis beszélünk róluk, nem ősobok. Mivel ha ősobok volnának, definíció szerint individuumok is volnának. Ha viszont individuumok volnának (individualizálható osztályok), akkor halmazok volnának. De ennek az ellenkezőjéből indultunk ki. *Tehát* az osztályok nem ősobok.

Az individuumváltozók értékei csak halmazok és ősobok lehetnek. Eltérően az eddig követett jelölésmódtól, *a, b, c* a továbbiakban nem névkonstanst, hanem szabad változót jelent, *x, y, z* pedig általában kötötten (vagy elvileg kötötten) fordul majd elő.

Nemlogikai konstansok: $\in$ és **h** (Ha az áttekinthetőség kedvéért olyan képletet emelünk ki vastag szedéssel, amelyben szerepel **h**, akkor helyette **h**-t írunk.)

Írásmódjuk és kiolvasásuk:

$a \in b$ – *a* eleme *b*-nek.

h(x) – *x* halmaz.

~**h**(x) – *x* nem halmaz, vagyis *x* ősob.

→» Miért jelenti a ~**h**(x) azt, hogy *x* ősob, és miért nem azt, hogy ősob vagy nem individualizálható osztály?

→» Magyarázz el, mi a különbség, és mi a hasonlóság a halmazok és az osztályok között!

→» Magyarázz el, mi a különbség, és mi a hasonlóság a halmazok és az ősobok között!

→» Magyarázz el, mi a különbség osztályok és az ősobok között!

Logikai konstansok: megtartjuk az = jelet, mert az ősobokkal kiegészült elméletben a matematikai felépítés esetén alkalmazott definíció már nem használható, hiszen csak egyetlen ősob létezését engedné meg:

Bizonyítás: $a = b \Leftrightarrow_{df} \forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)]$ *Tegyük fel*, hogy *a* és *b* egyaránt ősob! Ekkor a definíció azt mondja, hogy *a* és *b* egybeesik, azonos egymással. Csak akkor *nem* lennének ugyanis azonosak, ha az ekvivalencia bal oldala hamis volna. De akkor a jobb oldalnak is annak kellene lennie. Ám a jobb oldal mindenképp igaz, hiszen egy univerzálisan kvantált kifejezés csak akkor hamis, ha a kvantor hatóköre lehet hamis. A kvantorunk hatóköre viszont ebben a definícióban csak igaz lehet, mert két hamis kifejezés bikondicionálisa igaz. A $(x \in a)$ és $(x \in b)$ ugyanis egyaránt hamis, mert ha a és b tényleg ősob, akkor nincsenek elemeik. (Minden x-ről csak hamisan állíthatjuk, hogy eleme a-nak vagy b-nek.)

Tehát ősobok esetén a bal oldal soha nem lehetne hamis, ezért minden a és b egybeesne.

→» A Tankönyv 148. oldalán ezt olvassuk: „Így megtartjuk az (A7), (A8) alapsémákat is." Miért tartjuk meg? (Mit jelent itt az, hogy „így"?)

$\boldsymbol{H} = \langle L^{\mathrm{H}}, \Gamma_{\mathrm{H}} \rangle$

Γ_H a halmazelmélet speciális **(H0)-(H8)** posztulátumait tartalmazza [de ide sorolhatjuk a halmazelméletben is érvényes **(A1)-(A8)** sémákat is].

(Figyelem! A Tankönyv 149. oldalán az első sor hibás. $(x \in a)$ & $\cancel{(x \in b)}$. Helyesen: $(y \in a)$.)

II. Első posztulátumaink

Bár az áttekinthetőség kedvéért a posztulátumokat nyitott formában adjuk meg, valójában ezek univerzális lezártjai a posztulátumok. (A halmazelmélet posztulátumai, definíciói és legfontosabb tételei kigyűjtve megtalálhatók alább a IX. alfejezetben.)

(H0)

$$\boldsymbol{\exists x(x \in a) \supset \underline{\mathrm{h}}(a)}$$

$$\text{Zárt formában: } \forall a[\exists x(x \in a) \supset \mathbf{h}(a)]$$

Kiolvasás: Minden olyan *dolog*, *aminek* van eleme, halmaz. (≠ minden halmaznak van eleme: ugyanis a posztulátumban „⊃", nem pedig „≡" szerepel.)

Megjegyzés: A „dolog" és az „aminek" szavak *ontológiailag* reális valamikre utalnak. Az olyan osztályok viszont, amelyek nem individualizálhatók, nem ilyenek. Mondunk ugyan néha olyant, hogy „egy osztálynak eleme ez és ez", de ekkor az *eleme* kifejezést nem a **(H0)** által rögzített értelemben használjuk, hanem csak annyit fejezünk ki, hogy a szóban forgó dologra igaz az a predikátum, amelynek terjedelme az illető osztály.

→» **(H0)** posztulátum zárt formájából elhagyható vagy máshová helyezhető-e a külső zárójelpár? Miért?

Kontraponálva: $\sim\mathbf{h}(a) \supset \sim\exists x(x \in a)$

Kiolvasás: Ha *valami* nem halmaz, akkor nincsen eleme. ≈ Az *ősoboknak* nincsen eleme.

Megjegyzés: Az *osztályok* nem tartoznak a tárgyalási univerzumba, rájuk nem utalhat az *a* változó, mivel a „*valamik*” világának (a tárgyalási univerzumnak) csak két része van, a halmazok és az ősobok. Ezért, bár az osztályok sem halmazok, **(H0)** kontraponáltja osztályokról nem szól. Nem mondja, hogy nincsenek elemeik, vagyis hogy üresek.

(H1)

$$\boldsymbol{\underline{h}(a) \supset \underline{h}(b) \supset \forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)] \supset (a = b)} \Leftrightarrow_1$$

$$\mathbf{h}(a) \supset \mathbf{(h}(b) \supset \mathbf{[}\forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)] \supset (a = b)\mathbf{])} \Leftrightarrow_2$$

$$\mathbf{(h}(a) \;\&\; \mathbf{h}(b) \;\&\; \forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)]\mathbf{)} \supset (a = b)$$

A kiolvasást segítő átalakítások:

$\Leftrightarrow_1$ *Bezárójelezés*: **(H1)** a zárójel-elhagyási megállapodás felhasználásával (Vö.: Tankönyv 42. oldal) van felírva. Eszerint: ha egy kondicionális utótagja is kondicionális, akkor az utótagot határoló zárójelpár elhagyható. **(H1)** zárójel-elhagyás előtti alapszerkezete: $A \supset \mathbf{(}B \supset \mathbf{[}C \supset D\mathbf{])}$

$\Leftrightarrow_2$ *Áthelyezés*: Az áthelyezési törvény alkalmazása: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \;\&\; B) \supset C$ (Vö.: Tankönyv 42. oldal)

Kiolvasás: Ha minden dolog akkor és csak akkor eleme az egyik halmaznak, ha a másiknak is, akkor a két halmaz terjedelmileg egybeeső, vagyis azonos egymással.

A $\mathbf{h}(a)$ & $\mathbf{h}(b)$ kitételek elhagyása esetén az összes ősob ($\forall a$ és $\forall b$) egybeesne.

Bizonyítás: Ha *a* és *b* ősob, akkor a **(H1)**-ből megmaradó, zárt alakban felírt $\forall a \forall b\mathbf{(}\forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)] \supset (a = b)\mathbf{)}$ képletben a „≡” tagjai hamisak volnának. Következésképp az egész „≡” igaz volna, így a kondicionális előtagjának igazsága (mivel maga a kondicionális igaz) az utótag igazságát vonná maga után. QED. (Vö.: I./C alfejezetben szereplő érvet az azonosságpredikátum megtartása mellett.)

III. Osztályabsztrakciók és osztályváltozók

A. Új jeleink

A további posztulátumok ismertetése előtt kibővítjük metanyelvi apparátusunkat.

A halmazelméletben elsősorban halmazokról szeretnénk beszélni. Ám mivel a halmazelmélet *tárgynyelvében* [abban a nyelvben, amelyről beszélni akarunk: (L^{H})] szerepelnek predikátumok, amelyeknek terjedelme egy osztály, *kényelmes* lesz megengedni, hogy ezekről a predikátumokról beszélve, vagyis a *metanyelvben*, felbukkanjanak osztályok, de úgy, hogy az osztályok említése mindig *kiküszöbölhető* legyen, így ne módosítsa a halmazelmélet tárgynyelvét.

Legyen $\varphi(x)$ a halmazelmélet [tárgynyelvének] tetszőleges nyitott mondata! φ jelenthet egy normál predikátumot, vagy egy bonyolultabb képződményt is: pl. azt az alakulatot, ami $\forall x[F(x) \supset G(x)]$ formulából marad, ha x-et kihagyjuk belőle. (Ez is egy predikátum szimbóluma, ugyanis x névvel kitöltve olyan formulát eredményez, amelyet mondatként olvasunk ki.)

Osztályabsztrakciónak mondjuk az olyan [metanyelvi] kifejezést, amelynek alakja:

$$\{x:\ \varphi(x)\}$$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyekre φ igaz.

Megjegyzés: „x" itt *kötött* előfordulásúnak tekinthető, ezért van az, hogy nem a vagy b szerepel a képletben.

→» Magyarázza el, hogy miért tekintendő az $\{x:\ \varphi(x)\}$ alakú kifejezésekben x kötött előfordulásúnak!

Miden osztályabsztrakció egy-egy osztályt nevez meg.

Az osztályabsztrakciókat *osztályváltozókkal* (K, L, M) rövidíthetjük.

Legyen például κ az a predikátum, amelynek terjedelme az az osztály, amelyre a K osztályváltozó utal, λ pedig az a predikátum, amelynek terjedelmére L osztályváltozó utal! Tehát:

$K = \{x: \kappa(x)\}$ és $L = \{x: \lambda(x)\}$

Az osztályváltozó kifejezés *félreérthető.* Azt sugallja, mintha reális entitásokként felfogott osztályokra, vagyis a tárgyalási univerzum bizonyos elemeire utalna, hiszen eddig a változók közül még csak az individuumváltozókkal ismerkedtünk meg, amelyek éppen ezt tették. Az osztályváltozó valójában bizonyos *[meta]nyelvi kifejezésekre* utal.

B. Kiküszöbölési szabályok

Mivel az osztályabsztrakciókat csak azzal a feltétellel fogadjuk el, hogy kiküszöbölhetők, le kell írnunk kiküszöbölésük módját.

Ha az osztály(változó) a ∈ jel jobb oldalán szerepel:

(D1) $a \in \{x\colon \varphi(x)\} \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \varphi(a)$

$\varphi(a)$ az a formula, amely $\varphi(x)$-ből úgy keletkezik, hogy x szabad előfordulásait a-val helyettesítjük.

Kiolvasás: Azon, hogy a eleme azon dolgok az osztályának, amelyekre egy bizonyos predikátum [φ] igaz, azt értjük, hogy ez a predikátum igaz a-ra.

Konkrét osztályváltozóval:

$a \in K \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \kappa(a)$

Kiolvasás: Azon, hogy a eleme a K osztálynak, azt értjük, hogy a a κ predikátum terjedelmébe tartozik.

Általánosabban: Azon, hogy valami eleme egy osztálynak, azt értjük, hogy igaz rá az a predikátum, amelynek az illető osztály a terjedelme.

Ha az azonosságjel mindkét oldalán osztályváltozó szerepel:

(D2) $(K = L) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x[(x \in K) \equiv (x \in L)]$

Kiolvasás: Két osztályt azonosnak mondunk, ha minden dolog akkor és csak akkor eleme az egyiknek, ha eleme a másiknak is.

Két osztály azonossága terjedelmük azonosságát, egybeesését jelenti tehát. *Két osztály azonos, ha azonosak az elemeik.* A Tankönyv 149. oldalán ez olvasható: „(K = L) azt fejezi ki, hogy a K, L osztályokat definiáló nyitott mondatok terjedelmileg egybeesők.” Itt a $\varphi(x)$ típusú mondatokra kell gondolni. Azért nyitottak ezek a mondatok, mert bennük x szabad változó.

Az osztályváltozók kiküszöbölése a definíció jobb oldaláról **(D1)** segítségével folytatódik. Jelölje K újra a κ, L pedig a λ predikátum terjedelmét!

$(K = L) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x[(x \in K) \equiv (x \in L)] \Leftrightarrow_{\mathbf{(D1)}} \forall x[\kappa(x) \equiv \lambda(x)]$

Kiolvasás: Két osztályt azonosnak mondunk, ha minden dologra akkor és csak akkor igaz az a predikátum, amelynek terjedelme az egyik osztály, ha igaz rá az a predikátum is, amelynek terjedelme a másik osztály.

Ha az azonosságjel egyik oldalán osztályváltozó, a másikon individuum szerepel:

(D3) $(a = K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} (K = a) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv (x \in K)]$

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy egy osztály azonos egy individuummal, ha ez az individuum halmaz, és terjedelmileg egybeesik az osztállyal, *vagyis* minden dolog akkor és csak akkor eleme a halmaznak, ha eleme az osztálynak is.

Ha az a individuum ősob, akkor a definíció jobb oldalán az első konjunkciós tag hamis, ezért hamis az egész jobb oldal is, és így hamis a bal oldal is. *Tehát* az ősobok nem azonosíthatók osztályokkal.

$$[\sim\mathbf{h}(a) \supset a \neq K]$$

Az osztályváltozók kiküszöbölése a definíció jobb oldaláról **(D1)** segítségével folytatódik.

$(a = K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} (K = a) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv (x \in K)] \Leftrightarrow_{\mathbf{(D1)}} \mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv \kappa(x)]$

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy egy osztály azonos egy individuummal, ha ez az individuum olyan halmaz, amelynek minden dolog akkor és csak akkor eleme, ha igaz rá az a predikátum, amelynek terjedelme a kérdéses osztály.

Ha az osztályváltozó a $\in$ *jel bal oldalán szerepel*:

(D4) $(K \in b) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a[(a = K) \,\&\, (a \in b)]$

A kiolvasást segítő megfontolások: **(D3)** alapján tudjuk, hogy a egy halmaz, mert csak halmaz eshet egybe egy osztállyal. **(H0)** alapján tudjuk, hogy b halmaz, mert az individuumok közül csak a halmazoknak lehetnek elemei.

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy egy osztály [K] eleme egy individuumnak [b], ha van olyan halmaz [a], amely ezzel az osztállyal terjedelmileg egybeesik, és eleme az individuumnak [b].

Az osztályváltozók kiküszöbölése a definíció jobb oldaláról **(D3)** majd **(D1)** segítségével folytatódik.

$(K \in b) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a[(a = K) \,\&\, (a \in b)] \Leftrightarrow_{\mathbf{(D3)}}$

$\exists a\mathbf{(}\mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv (x \in K)] \,\&\, (a \in b)\mathbf{)} \Leftrightarrow_{\mathbf{(D1)}}$

$\exists a[\mathbf{(}\mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv \kappa(x)]\mathbf{)} \,\&\, (a \in b)] \Leftrightarrow_{\text{átrendezve}}$

$\exists a\mathbf{(}\mathbf{h}(a) \,\&\, (a \in b) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv \kappa(x)]\mathbf{)}$

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy egy osztály [K] eleme egy individuumnak [b], ha van olyan az individuum elemét képező halmaz [a], amelynek minden dolog [x] akkor és csak akkor eleme, ha igaz rá az a predikátum [κ], amelynek terjedelme a kérdéses osztály [K].

Ha az $\in$ *jel mindkét oldalán osztályváltozó szerepel*:

(D5) $(K \in L) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a[(a = K) \,\&\, (a \in L)]$

A kiolvasást segítő megfontolás: **(D3)** alapján tudjuk, hogy *a* halmaz, mert csak halmaz eshet egybe egy osztállyal.

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy az egyik osztály eleme a másiknak, ha van olyan az előbbivel terjedelmileg megegyező halmaz, amely eleme az utóbbinak.

Az osztályváltozók kiküszöbölése a definíció jobb oldaláról **(D3)** majd **(D1)**, illetve a második konjunkciós tagban újra csak **(D1)** segítségével folytatódik.

$(K \in L) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a[(a = K) \,\&\, (a \in L)] \Leftrightarrow_{\mathbf{(D3)(D1)}} \exists a\mathbf{[}(\mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv \kappa(x)]) \,\&\, \lambda(\mathrm{a})\mathbf{]}$

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy *K* osztály eleme egy *L* osztálynak, ha van olyan halmaz, amelyre *egyrészt* igaz az a predikátum [λ], amelynek terjedelme az *L* osztály, *másrészt* minden dolog akkor és csak akkor eleme ennek a halmaznak, ha igaz rá az a predikátum [κ], amelynek terjedelme a *K* osztály. *Egyszerűbben*: Akkor mondjuk, hogy *K* osztály eleme egy *L* osztálynak, ha van olyan a λ predikátum terjedelmébe tartozó halmaz, hogy minden dolog akkor és csak akkor eleme ennek a halmaznak, ha igaz rá a κ predikátum.

Ha az osztályváltozó **h** *argumentumaként szerepel*:

(D6) $\mathbf{h}(K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a(a = K)$

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy egy osztály halmaz, ha terjedelmileg egybeesik egy halmazzal.

Az osztályváltozók kiküszöbölése a definíció jobb oldaláról **(D3)** majd **(D1)** segítségével folytatódik.

$$\mathbf{h}(K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a(a = K) \Leftrightarrow_{\mathbf{(D3)}} \exists a\mathbf{(}\mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv (x \in K)]\mathbf{)} \Leftrightarrow_{\mathbf{(D1)}}$$
$$\exists a\mathbf{(}\mathbf{h}(a) \,\&\, \forall x[(x \in a) \equiv \kappa(x)]\mathbf{)}$$

Kiolvasás: Akkor mondjuk, hogy egy osztály halmaz, ha van olyan halmaz, amelynek minden dolog akkor és csak akkor eleme, ha igaz rá az a predikátum [κ], amelynek terjedelme a kérdéses osztály [*K*].

A **(D1)-(D6)** kiküszöbölési sémák birtokában a halmazelmélet minden formulájában szerepeltethetünk osztályabsztrakciókat, kivéve a kvantifikált változók helyét. Az osztályváltozók ugyanis nem individuumváltozók, hanem a halmazelmélet metanyelvéhez tartozó rövidítések. Kvantifikálásuk feltételezné az osztályok univerzumának elismerését. (Amely univerzumban az osztályok individuumok volnának.)

C. További jelölések

Az *elemei felsorolásával* megadott osztály: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} =_{\text{df}} \{x\text{:}\ \ (x = a_1) \vee (x = a_2) \vee \ldots \vee (x = a_n)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valamelyikével azonosak.

→» Miért $=_{\text{df}}$ és nem pedig $\Leftrightarrow_{\text{df}}$ jel szerepel a definícióban, mint például az kiküszöbölési szabályok esetében?

→» Milyen különbségek vannak a és $\{a\}$ kifejezések között?

→» Hogyan írható fel osztályabsztrakcióval az {a,b} osztály?

Az *üres osztály*: $\varnothing =_{\text{df}} \{x\text{:}\ \ (x \neq x)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek nem azonosak önmagukkal.

A klasszikus logika egyik törvénye szerint minden dolog azonos önmagával. Abban az osztályban, amelyben ez nem így van, abban nincsenek dolgok, az üres.

Két osztály *egyesítése*: $K \cup L =_{\text{df}} \{x\text{:}\ \ (x \in K) \vee (x \in L)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek az egyik vagy a másik osztálynak elemei.

→» Fennáll-e a következő azonosság? $\{\mathrm{a}\} \cup \{\mathrm{b}\} = \{\mathrm{a,b}\}$

→» Fennáll-e a következő azonosság? $\{a\} \cup \{b\} = a \cup b$

Két osztály *különbsége*: $K - L =_{\text{df}} \{x\text{:}\ \ (x \in K)\ \&\ (x \notin L)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek elemei K-nak, de nem elemei L-nek.

Két osztály *metszete*: $K \cap L =_{\text{df}} \{x\text{: } (x \in K)\ \&\ (x \in L)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek mindkét osztálynak elemei.

K osztály *egyesítési osztálya*: $\cup(K) =_{\text{df}} \{x\text{:}\ \ \exists y[(x \in y)\ \&\ (y \in K)]\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek elemei egy olyan individuumnak, amely K eleme.

(Figyelem! A Tankönyv 150. oldalán szereplő definícióban a kvantor hatókörét határoló jobb oldali zárójel hiányzik.)

Ha $\cup(K)$ nem üres, akkor elemeit a *K-beli halmazok összes eleme* képezi.

Ha K-ban nincsen halmaz: $\cup(K) = \varnothing$

Mivel $\varnothing$-ban nincsen halmaz: $\cup(\varnothing) = \varnothing$

→» Fennáll-e a következő azonosság? $\{a, b\} = \cup(\{a,b\})$

→» Fennáll-e a következő azonosság? $\{a\} \cup \{b\} = \cup(\{a,b\})$

→» Fennáll-e a következő azonosság? $a \cup b = \cup(\{a,b\})$

K osztály *metszetosztálya*: $\cap(K) =_{\text{df}} \{x\text{: } \forall y[(y \in K) \supset (x \in y)] \ \& \ \exists y(y \in K)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek nemüres K minden elemének elemei.

Hosszabban: Azon individuumok osztálya, amelyekről két dolog igaz: *egyrészt*, hogy minden olyan dolognak elemei, ami eleme K-nak, *másrészt*, hogy K nem üres. Egyszerűen, pongyolán: A K-beli halmazok közös elemei.

→» A Tankönyv 150. oldalán a következőt olvassuk: „Ha K minden eleme halmaz, akkor $\cap(K)$ ezek közös elemeit tartalmazza, s az ellenkező esetben üres.” Mit jelent itt az „ellenkező eset”? Azt, hogy K nem minden eleme halmaz, *vagy* azt, hogy egy eleme se halmaz?

Ahhoz hogy K metszetosztálya individuumokat tartalmazzon, az is kell, hogy K-nak legyen eleme. Ha K-nak nincs eleme, akkor a definíció második konjunkciós tagja hamis. Ebben az esetben sem találunk olyan individuumot [x], amelyre két dolog is (a konjunkció mindkét tagja) igaz volna, így: $\cap(\varnothing) = \varnothing$.

→» Mi történne, ha a definícióban elhagynánk a második konjunkciós tagot?

→» Fennáll-e a következő azonosság? $a \cap b = \cap(\{a,b\})$

Az osztályok közti *része* reláció: $K \subseteq L \ \Leftrightarrow_{\text{df}} \ \forall x[(x \in K) \supset (x \in L)]$

Kiolvasás: Egyik osztályt a másik részének mondjuk, ha abban az esetben, amikor valami eleme az elsőnek, eleme a másiknak is.

Ez a *része* reláció megengedi, hogy a $\supset$ helyén az erősebb $\equiv$ álljon. Ekkor $K = L$. A *valódi része* relációban viszont éppen ezt a lehetőséget zárjuk majd ki.

→» Mi a hasonlóság, és mi a különbség $\subseteq$ és $\in$ között?

→» Igaz-e, hogy az $\varnothing$ minden osztálynak része? Miért?

→» Igaz-e, hogy az $\varnothing$ minden osztálynak eleme? Miért?

→» Lehetséges-e, hogy $x \in y$, és $x \subseteq y$? Miért?

$\rightarrow$» Lehetséges-e, hogy $x \in y$, de $\sim(x \subseteq y)$? Miért?

$\rightarrow$» Lehetséges-e, hogy $x \subseteq y$, de $x \notin y$? Miért?

$\rightarrow$» Lehetséges-e, hogy $x = y$, de $\sim(x \subseteq y)$? Miért?

Az osztályok közti *valódi része* reláció: $K \subset L \Leftrightarrow_{\text{df}} K \subseteq L$ & $(K \neq L)$

Kiolvasás: Egyik osztályt a másik *valódi* részének mondjuk, ha az egyik része a másiknak, de a kettő nem azonos egymással.

D. A halmazok mint osztályok

Egy *individuum elemeinek osztálya*: $a^{\in} =_{\text{df}} \{x\colon (x \in a)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek elemei a-nak. ≈ Egy individuum [a] elemeinek osztálya.

A képlet kiolvasását a Tankönyv bizonyára a félreértések elkerülése végett nem adja meg, hiszen a képletet a későbbiekben csak mint „egy *halmaz* elemeinek osztályát” fogja *felhasználni*, ez az értelmezés azonban nem meríti ki a képlet teljes tartalmát. (Ez az első megnyilvánulása egy problémának, amellyel a Tankönyv következő oldalain újra meg újra találkozunk majd.) Mindazonáltal az $a^{\in}$ érvényét nem korlátozhatjuk csak a halmazokra, hiszen a nemcsak halmaz, hanem a halmazelméletnek a Tankönyvben kifejtett változatában ősob is lehet. Noha a képletben szó van az elemeiről, a definíció nem állítja, hogy léteznek ilyen elemek, (a képet nem tartalmaz $\exists x$ tagot), és az osztályabsztrakció üres osztályt is jelölhet.

Bizonyítandó tételeink:

1. Ha a ősob, akkor $a^{\in} = \varnothing$, továbbá $a^{\in} \neq a$.
2. Ha a halmaz, akkor $a^{\in} = a$.

1. bizonyítás (ha a ősob)

Az $a^{\in}$ (definíció szerint) azoknak az individuumoknak az osztályát jelenti, amelyek elemei a-nak. Ha a ősob, akkor nincsenek elemei, vagyis elemeinek osztálya üres. Tehát, ha $\sim\mathbf{h}(\mathrm{a})$, akkor $\mathrm{a}^{\in} = \varnothing$.

Mivel pedig **(D3)** szerint egy ősob [a] nem azonosítható osztályokkal, $a^{\in}$ viszont egy osztályt jelöl, a nem lehet azonos $a^{\in}$-val, *tehát* $\mathrm{a}^{\in} \neq \mathrm{a}$.

2. bizonyítás (ha *a* halmaz)

A Tankönyv útmutatása szerint a bizonyítást **(D3)** felhasználásával fogjuk végezni. Induljunk ki a következő többtagú azonosságból!

$a =_? a^{\in} =_1 \{x\colon (x \in a)\} =_2 K$

Magyarázatok:

$=_?$ Ez a bizonyítandó azonosság.

$=_1$ Ez az azonosság $a^{\in}$ definíciója miatt áll fenn

$=_2$ Azt a döntést fejezi ki, hogy a bal oldalán álló, az osztályabsztrakcióval tartalmilag meghatározott osztályt a *K* osztályváltozóval rövidítjük.

A továbbiakban azt kell tehát bizonyítani, hogy az $a = K$ állítás igaz, vagyis a későbbiekben még többször használandó jelöléssel azt, hogy $a = K \Leftrightarrow$ i. (Ez a jelölésmód nem szakszerű, csak a szemléletessége miatt használjuk. Az i ugyanis szemantikai érték, és szigorú értelemben nem állhatna formulák helyett.)

$a =_? K \Leftrightarrow_{(D3)} \mathbf{h}(a) \,\&\, \forall y[(y \in a) \equiv (y \in K)] \Leftrightarrow_{(D1)} \mathbf{h}(a) \,\&\, \forall y[(y \in a) \equiv (\kappa(y))] \Leftrightarrow_3$

$\mathbf{h}(a) \,\&\, \forall y[(y \in a) \equiv (y \in a)] \Leftrightarrow_4 \mathrm{i} \,\&\, \forall y[\mathrm{i}] \Leftrightarrow_5 \mathrm{i}$

Tehát: $a = K \Leftrightarrow$ i

Magyarázatok:

A $\Leftrightarrow_3$ ekvivalencia azért áll fent, mert a κ predikátum nem más, mint $(\ldots \in a)$ egyargumentumú predikátum. *K* ugyanis a κ predikátum terjedelme, *K* osztályt pedig azoknak az individuumoknak az osztályaként definiáltuk, amelyek elemei *a*-nak.

A $\Leftrightarrow_4$ ekvivalencia azért áll fent, mert először is (az első i) érvényesítettük a most végzett bizonyítás előfeltevését, hogy **h**(*a*), továbbá a kvantor hatóköre nyilvánvalóan szintén i, hiszen olyan bikondicionális, amelynek mindkét argumentuma ugyanaz.

A $\Leftrightarrow_5$ ekvivalencia azért áll fent, mert $\forall y[\mathrm{i}]$ maga is igaz, így két i konjunkciójaként kapjuk a jobb oldalon álló i-t.

Mivel pedig *K* csak $a^{\in}$ egy másik neve, $a = K$ bizonyítása révén ezt is bizonyítottuk: $a = a^{\in}$.

Az első tétel is bizonyítható az iménti bizonyítás analógiájára.

$a =_? K \Leftrightarrow_{(D3)} \mathbf{h}(a) \,\&\, \forall y[(y \in a) \equiv (y \in K)] \Leftrightarrow_{(D1)} \mathbf{h}(a) \,\&\, \forall y[(y \in a) \equiv (\kappa(y))] \Leftrightarrow_3$

$\mathbf{h}(a) \,\&\, \forall y[(y \in a) \equiv (y \in a)] \Leftrightarrow_4 \mathrm{h} \,\&\, \forall y[\mathrm{i}] \Leftrightarrow_5 \mathrm{h}$

Tehát: $a = K \Leftrightarrow$ h, vagyis $a \neq K \Leftrightarrow$ i.

Mivel pedig K most is egy $a^{\in}$másik neve, ezt kapjuk: $a \neq a^{\in}$

A két bizonyított tétel így formalizálható:

1. $\sim\mathbf{h}(a) \supset a \neq a^{\in}$

2. $\mathbf{h}(a) \supset a = a^{\in}$

Kontraponáljuk az első tételt!

1’ $a = a^{\in} \supset \mathbf{h}(a)$

Az így nyert tételt egyesítve a másodikkal a következő formulához jutunk:

$$\underline{\mathbf{h}}(\boldsymbol{a}) \equiv (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\in})$$

Kiolvasás: Valami akkor és csak akkor halmaz, ha terjedelmileg egybeesik elemeinek osztályával.

Mivel terjedelmileg egybeesni és azonosnak lenni ugyanazt jelenti, ismét arra jutottunk, (amit persze már a halmaz definíciójából is (individualizálható osztály) tudtuk), hogy a halmazok mind osztályok. *Ezért minden tétel és definíció, amit osztályokról mondunk ki, érvényes a halmazokra is.*

→» Fennáll-e a következő ekvivalencia? $a^{\in} = b^{\in} \Leftrightarrow a = b$

→» Fennáll-e a következő ekvivalencia? $\forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)] \Leftrightarrow a^{\in} = b^{\in}$

→» Fennáll-e a következő azonosság? $a^{\in} \cup b^{\in} = \cup(\{a,b\})$

IV. Valódi osztályok

A. Fogalom-meghatározás és példák

Minden halmaz osztály. Ha a két fogalom nem szinonim, akkor igaz kell, hogy legyen: de nem minden osztály halmaz.

*Valódi osztályok*nak hívjuk azokat az osztályokat, amelyek nem halmazok.

Három példa a valódi osztályokra:

(D7)

Ind $=_{\mathrm{df}}$ $\{x\colon\ (x = x)\}$

Kiolvasás: Azon dolgok osztálya, amelyek azonosak önmagukkal.

Mivel minden dolog azonos önmagával, az **Ind** osztályba tartozik minden dolog, köztük minden, amiről csak szót ejthetünk, vagyis a tárgyalási univerzum minden eleme. A tárgyalási univerzum elemei individuumok. Innen származik az **Ind** kód.

Hm $=_{\mathrm{df}}$ $\{x\colon\ \mathbf{h}(x)\}$

Kiolvasás: Azon individuumok osztálya, amelyek halmazok, avagy a halmazok osztálya.

Ru $=_{\mathrm{df}}$ $\{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ (x \notin x)\}$

Kiolvasás: Azon halmazok osztálya, amelyek nem elemeik önmaguknak.

Ru Russell nevére utal, akinek egy híres idézete segíthet felfogni ezt az osztályt. „Úgy tűnt nekem, hogy egy osztály egyes esetekben eleme, más esetekben nem eleme önmagának. Például a teáskanalak osztálya nem teáskanál [Vagyis a teáskanalak osztályában, amelyben csak a teáskanalak, a fizikai tárgyak vannak, nincsen benne ezeknek az összessége, maga az osztály. Ez az osztály nem eleme önmagának.], ámde azon tárgyak [a gondolkodás egyáltalában vett tárgyairól van szó] osztálya, amelyek nem teáskanalak, maga is azoknak a dolgoknak az egyike, amelyek nem teáskanalak."[4]

Ind, Hm, Ru osztályparaméterek, névparaméterek, *metanyelvi* tulajdonnevek.

→» Mi a különbség az osztályparaméterek és az osztályváltozók, például **Ru** és *K* között?

---

[4] Bertrand Russell: *Filozófiai fejlődésem*. Budapest, Gondolat, 1968. 107.

B. A Ru valódi osztály

1. Bizonyítsuk indirekt bizonyítással, hogy **Ru** nem halmaz: ~**h**(**Ru**)!

Az indirekt bizonyítás logikájának megfelelően tegyük fel a bizonyítandó ellenkezőjét! Tegyük fel, hogy **h**(**Ru**)! Ha feltevésünk ellentmondáshoz vezet, akkor a tételt bizonyítottuk.

(D6) értelmében **h**(**Ru**) azt jelenti, hogy van egy olyan halmaz (jelöljük *r*-rel), amellyel **Ru** terjedelmileg egybeesik. Tulajdonképpen a **(D6)**-ot, vagyis a $[\mathbf{h}(K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a(a = K)]$ ekvivalenciát szeretnénk az indirekt bizonyítás során *K* helyett **Ru**-ra bizonyítani: $\mathbf{h}(\mathbf{Ru}) \Leftrightarrow \exists r(r = \mathbf{Ru})$

A zárójel tartalmát (a terjedelmi egybeesést) így fejezhetjük ki:

$$(r = \mathbf{Ru}) \Leftrightarrow_{\mathbf{(D3)}} \forall y[(y \in r) \equiv (y \in \mathbf{Ru})]$$

> **(D3)**-tól ez az azonosság csak annyiban különbözik, hogy a jobb oldalon nem kötöttük ki, hogy **h**(*r*). Ezt ugyanis most *r* bevezetésekor már feltettük. ((**D3)**-ban azért szerepelt a **h**(*a*) kikötés, mert osztályoknak és általában az individuumoknak az azonosításáról szólt, és többek között azt volt hivatva elmondani, hogy az utóbbiak közül csak a halmazok azonosíthatók osztályokkal.)

(D1) szerint $(y \in \mathbf{Ru})$ azt jelenti, hogy *y*-ra igaz az a nyitott mondat, $[\varphi(x)]$ amely **Ru**-t definiálja. Tehát: $y \in \mathbf{Ru} \Leftrightarrow_{\mathbf{(D1)}} \mathbf{h}(y) \,\&\, (y \notin y)$

Behelyettesítve:

$$\forall y[(y \in r) \equiv [\mathbf{h}(y) \,\&\, (y \notin y)]]$$

Bontsuk fel a kvantort! **(A4)** $[\forall xA \supset A^{t/x}]$ értelmében, ha valami minden individuumra igaz, akkor igaz *r*-re is.

$$(r \in r) \equiv [(\mathbf{h}(r) \,\&\, (r \notin r)]$$

Ebből a **PC** alapján következik: ~**h**(*r*)

> →» Miért a **PC** és nem a **QC** alapján?
>
> Bizonyítás: Ha a bikondicionális bal oldala *igaz*, akkor a jobb oldala is. A jobb oldal konjunkció, amely csak akkor lehet igaz, ha mindkét tagja igaz. De a második tag nem lehet igaz, ha a bikondicionális bal oldala igaz.
>
> Csak abban az esetben igaz tehát az egész bikondicionális, ha mindkét oldala *hamis*. Ha a bal oldal hamis, akkor a jobb oldalnak is annak kell lennie. Ez viszont, tekintve, hogy a második konjunkciós tag igaz, csak akkor lehetséges, ha az első hamis.
>
> *Tehát* a bikondicionális csak akkor igaz, ha ~**h**(*r*).

Abból indultunk ki, hogy **h**(**Ru**), vagyis hogy $\exists r(r = \mathbf{Ru})$, ahol r egy halmaz. Most viszont azt kaptuk, hogy r nem halmaz. Feltevésünk tehát *ellentmondás*hoz vezetett, ezért nem volt helyes. Az, amivel **Ru** terjedelmileg egybeesik, nem halmaz. Tehát **Ru** sem az.

$$\Vdash \sim\mathbf{h}(\mathbf{Ru})$$

Kiolvasás: **Ru** nem halmaz. ≈ A Russell osztály valódi osztály.

Mivel **Ru** *osztály*paraméter, a képlet nem állítja azt, hogy **Ru** ősobjektum volna. Csak a ~**h**(a) típusú képlet definiálja az ősobokat, hiszen ebben a individuumváltozó. Ha egy individuum nem halmaz, akkor ősob; ha pedig egy osztály nem halmaz, akkor valódi osztály.

→» ~**h**(**Ru**) bizonyításához a halmazelmélet posztulátumait nem használtuk fel. Miért írj a Tankönyv a tétel elé mégis a $\Vdash$ jelet, amely a Tankönyv 148. oldala szerint $\Gamma_{\mathrm{H}} \vdash$ rövidítése?

2. Bizonyítsuk, hogy összeférhetetlen a **QC**-vel az az állítás, hogy **Ru** halmaz!

QC-ben bizonyítható a

$$\forall r(F(r) \supset \sim\forall x[G(x,r) \equiv [F(x) \,\&\, \sim G(x,x)]])$$

formula, ami azt jelenti, hogy logikai igazság: a „semmiből” is következik, a „semminek” is konklúziója. Ennek bizonyításaként készítsük el a negáltjának az analitikus táblázatát! (Mivel a halmazelméletben r és x is változók, és szükségünk lesz névre is, tekintsük α-t névparaméternek!)

$\sim\forall r(F(r) \supset \sim\forall x[G(x,r) \equiv [F(x) \,\&\, \sim G(x,x)]])$		
∃r~(. . . . .)		
$\sim(F(\alpha) \supset \sim\forall x[G(x,\alpha) \equiv [F(x) \,\&\, \sim G(x,x)]])$		
$F(\alpha)$		
$\sim\sim\forall x[G(x,\alpha) \equiv [F(x) \,\&\, \sim G(x,x)]]$		
$G(\alpha,\alpha) \equiv [F(\alpha) \,\&\, \sim G(\alpha,\alpha)]$		
$G(\alpha,\alpha)$	$\sim G(\alpha,\alpha)$	
$F(\alpha) \,\&\, \sim G(\alpha,\alpha)$	$\sim[F(\alpha) \,\&\, \sim G(\alpha,\alpha)]$	
$F(\alpha)$	$\sim F(\alpha)$	$G(\alpha,\alpha)$
$\sim G(\alpha,\alpha)$	*	*
*		

Cseréljük ki a bizonyított mondatban a predikátumokat: Írjunk F helyére **h**-t, és G helyére $\in$-t!

$$\forall r(\mathbf{h}(r) \supset \sim\forall x[(x \in r) \equiv [\mathbf{h}(x) \mathbin{\&} \sim(x \in x)]])$$

Ez a formula ~**h**(**Ru**)-t rövidíti, vagyis **QC**-ben bizonyított, hogy ~**h**(**Ru**).

Annak bizonyításként, ez a formula valóban ~**h**(**Ru**)-t rövidíti, induljunk ki ~**h**(**Ru**) jelentéséből, és mutassuk meg, hogy valóban az iménti formulával fejezhető ki.

1. ~**h**(**Ru**) ≈ Nincs olyan halmaz, amellyel **Ru** terjedelmileg egybeesik.
2. $\sim\exists r(\mathbf{h}(r) \mathbin{\&} (r = \mathbf{Ru}))$ — formalizálva: 1
3. $\sim\exists r(\mathbf{h}(r) \mathbin{\&} \forall x[(x \in r) \equiv [x \in \mathbf{Ru}\ ]])$ — **(D2)**: 2
4. $\sim\exists r(\mathbf{h}(r) \mathbin{\&} \forall x[(x \in r) \equiv [\mathbf{h}(x) \mathbin{\&} \sim(x \in x)]])$ — **(D1)**: 3
5. $\forall r\sim(\mathbf{h}(r) \mathbin{\&} \forall x[(x \in r) \equiv [\mathbf{h}(x) \mathbin{\&} \sim(x \in x)]])$ — $\sim\exists \Leftrightarrow \forall\sim$ alkalmazása: 4
6. $\forall r(\mathbf{h}(r) \supset \sim\forall x[(x \in r) \equiv [\mathbf{h}(x) \mathbin{\&} \sim(x \in x)]])$ — $\sim(p \mathbin{\&} \sim q) \Leftrightarrow p \supset q$ alkalmazása: 5

Az utolsó sor valóban megegyezik az analitikus táblázattal bizonyított tétellel.

→» Igaz-e, hogy **h**(∪(**Ru**))?

C. A valódi osztályok ontológiai státusza

Bizonyítottuk, hogy **Ru** valódi osztály, ezzel (úgy tűnhet) azt is, hogy:„Léteznek valódi osztályok.” Ez a mondat így fogalmazható át: „*Van olyan x, hogy x valódi osztály*.” Ez pedig már nyíltan kvantifikál osztályok felett, individuumváltozóval utal rájuk, és legalább egy osztály *létét* állítja.

Valójában azonban ennél sokkal kevesebbet állítottunk és bizonyítottunk: Csak azt, hogy ellentmondást jelent azt hinni, hogy minden φ predikátum terjedelme halmaz, *vagyis*, hogy ellentmondás, hogy minden $\varphi(x)$ nyitott formulához van egy olyan a halmaz, hogy $\forall x[(x \in a) \equiv \varphi(x)]$. *Vagyis*, megmutattunk egy olyan konkrét predikátumot, [**h**(…) & (…≠…)], amelynek terjedelme tényleg nem halmaz.

V. Párok és egyesítés

A. Két újabb posztulátum

(H2)

$$\underline{\mathbf{h}}(\{a,b\})$$

Kiolvasás: Az olyan nemüres osztály, amelynek legfeljebb két eleme van, mindig halmaz.

Magyarázatok. A ( ) zárójel a **h** predikátum argumentumát határolja, a { } a közrefogott individuumokból elemei felsorolásával megadott osztályt képez.

Nemüres osztályról azért van szó, mert fel tudtunk sorolni benne elemeket. (Később az üres osztályt is halmaznak fogjuk tekinteni. Ezért akkor is igaz tételt kapnánk, ha elhagynánk a nemüres kitételt. Ezt azonban két okból sem tesszük: *Egyrészt* a Tankönyv éppen ebből a posztulátumból vezeti majd le az üres halmazra vonatkozó tételt. *Másrészt*, bár a kimondott tétel igaz volna, nem **(H2)** kiolvasása lenne: az üres osztályt aligha lehet elemei felsorolásával megadni. A „legfeljebb két elem” *itt* „legalább egy elemet” is jelent.)

Az említett elemeknek individuumoknak kell lenniük, tehát ősoboknak vagy halmazoknak. (Illetve olyan osztályoknak, amelyek egyben halmazok is.)

Legfeljebb két elem: Azért kell így fogalmazni, mert elképzelhető, hogy a két felsorolt individuumnév (a, b) ugyanazt az elemet nevezi meg, lehet, hogy csak egyelemű az osztályunk.

Mivel $\{a,a\} = \{a\}$ ezért

$$\Vdash \mathbf{h}(\{a\})$$

Kiolvasás: Az egyelemű osztályok halmazok.

Ez azt is jelenti, hogy ha akár csak egy individuum is van a tárgyalási univerzumban, képezhető halmaz is.

→» Mást mondd-e a $\mathbf{h}(\{a\})$ és a $\mathbf{h}(a)$ kifejezés?

(Figyelem! A Tankönyv 152. oldalán a **h** predikátum argumentumát határoló zárójelpár lemaradt.)

(H3)

$$\underline{\mathbf{h}}(\cup(a^{\in}))$$

Kiolvasás: Egy *individuum* elemeinek egyesítési osztálya halmaz.

A Tankönyvben ezt olvassuk: „(H3) folytán halmaz egyesítési osztálya is halmaz.” Ezzel a szerző nem azt akarja mondani, hogy ez lenne a posztulátum helyes kiolvasása, hanem csak azt, hogy ez a *gyengébb* állítás is következik **(H3)**-ból (vö.: „folytán”). Ha a szerepében csak halmazt engednénk meg, akkor a „halmaz egyesítési osztálya is halmaz” volna a helyes kiolvasás. Hiszen ekkor $a^{\in} = a$, vagyis $\cup$ „argumentumaként” a állna, amelyről feltettük, hogy halmaz, így valóban egy halmaz egyesítési osztályáról volna szó. De nincsen akadálya annak, hogy a-t egyszerűen individuumváltozónak tekintsük, vagyis hogy megengedjük, hogy a akár ősob is lehessen. Ekkor **(H3)** – amennyire egyelőre meg tudjuk ítélni – többet és mást állít, mint amit a „halmaz egyesítési osztálya is halmaz.”

Felmerülhet az az ellenvetés, hogy talán a **(H3)**-ban szereplő valamelyik jel tiltja, hogy a ősob legyen, de nincsen ilyen tilalom.

A $a^{\in}$ jel definiált ősobokra is: ha $\sim\mathbf{h}(a)$, akkor $a^{\in} = \{x\colon\ (x \in a)\} = \varnothing$.

A $\cup(K)$ definíciója sem követeli meg, hogy K-nak legyenek elemei. Legyen $K = \varnothing$, és vizsgáljuk meg, mit mond ilyen esetben a definíció: $\cup(\mathrm{K}) =_{\mathrm{df}} \{x\colon\ \exists y[(y \in K)\ \&\ (x \in y)]\}$! Ekkor $\exists$ hatóköre és vele együtt $\exists y[\ldots]$ hamis, vagyis nincsenek olyan individuumok, amelyek a $\cup(K)$ osztályba tartoznak. Tehát $\cup(\varnothing) = \varnothing$. Ezért **(H3)**-ban $\cup$ „argumentuma” üres osztály is lehet.

Úgy *tűnhet*, hogy az eddigiek elég alapot szolgálatnak annak levezetéséhez, hogy az üres osztály halmaz.

Ha a ősob, akkor $a^{\in} = \varnothing$.

Behelyettesítve **(H3)**-ba ezt kapjuk: $\mathbf{h}(\cup(\varnothing))$

Ez viszont $\cup(\varnothing) = \varnothing$ folytán így egyszerűsíthető:

$$\Vdash \mathbf{h}(\varnothing)$$

Kiolvasás: Az üres osztály halmaz.

Ezt a tételt később a Tankönyv is levezeti (153. oldal). Vajon miért nem vezette le már most? Ennek okáról a 152. oldal közepén található mondat árulkodik: „Elméletünkben van hely az ősobok számára, de nem tartalmaz ősobokat kötelezően.” Vagyis azért nem az ősobok felhasználásával vezeti le a $\mathbf{h}(\varnothing)$ tételt, hogy továbbra se legyen kötelező az ősobok elismerése. Ha ugyanis egy fontos tétel bizonyításához igénybe kell venni őket, akkor jelenlétük többé már nem esetleges az elméletben. Más szóval a halmazelmélet megengedi, hogy legyenek ősobok, de nem követeli meg. Ezért a bizonyításaink nem épülhetnek az ősobokra. Eddigi posztulátumaink alapján tehát még nem lehet *bizonytani*, hogy az üres osztály halmaz. Egy elméletben tételeket csak az axiómákból bizonyíthatunk, az ősobok létét azonban az axiómák nem mondják ki.

B. További tételek

1. **(H2)** szerint $\mathbf{h}(\{a,b\})$.
Későbbi céljaink érdekében nevezzük el a $\{a,b\}$ halmazt c-nek! Tehát $c = \{a,b\}$
Mivel $\mathbf{h}(c)$, ezért: $c = c^{\in}$
Tehát: $c^{\in} = \{a,b\}$

2. **(H3)** szerint $\mathbf{h}(\cup(c^{\in}))$.
Az előző pontot ebbe behelyettesítve kapjuk:

$$\Vdash \mathbf{h}(\cup(\{a,b\}))$$

Kiolvasás: Egy legfeljebb kételemű nemüres osztály egyesítési osztálya halmaz.

3. A továbbhaladáshoz először ezt kell belátni: $\cup(\{a,b\}) = a^{\in} \cup b^{\in}$
Bizonyítás. Értelmezzük külön-külön az azonosság tagjait, és látni fogjuk, hogy ugyanazt az osztályabsztrakciót fedik!
$a^{\in} \cup b^{\in} =_{\mathrm{df}} \{\mathrm{x}\colon (\mathrm{x} \in \mathrm{a}^{\in}) \vee (\mathrm{x} \in \mathrm{b}^{\in})\} =_1 \{x\colon (x \in a) \vee (x \in b)\}$
$=_1$ indoklása: Ha a halmaz, akkor $a^{\in}$ helyettesíthető a-val. Ha a ősob, akkor ez a helyettesítés nem automatikus. Viszont $(x \in a^{\in})$ igazságértéke ebben az esetben is megegyezik $(x \in a)$ igazságértékével (vagyis hamis), ezért jelen céljainkra a helyettesítés ebben az esetben is jogos. Ugyanez igaz b-re is.
$\cup(\{a,b\}) =_{\mathrm{df}} \{x\colon \exists y[(x \in y) \,\&\, (y \in \{a,b\})]\} =_2 \{x\colon \exists y[(x \in y) \,\&\, (y = a \vee y = b)]\}$
$=_3 \{x\colon (x \in a) \vee (x \in b)\}$
$=_2$ indoklása: Az y egy elemei felsorolásával megadott osztályon „belüli” individuum. Az y eleme $\{a,b\}$-nek, tehát $\{a,b\}$ elemei közül az egyik, ezért $(y = a)$ vagy $(y = b)$ igaz.
$=_3$ indoklása: Azok az x individuumok, amelyek y-nak az elemei, a-nak vagy b-nek az elemei.
A kvantort is elhagyhattuk, mert az elemei felsorolásával megadott osztályban léteznek az elemek. Ha y ezekkel azonos, akkor szintén létezik. Ám y-nal szemben van egy másik kikötés is. Halmaznak kell lennie, mert vannak elemei, nevezetesen az x-ek. Ha ez nem

teljesül, akkor a is és b is ősobok. Ekkor $\cup(\{a,b\}) = \varnothing$. Csakhogy ebben az esetben $a^{\in} \cup b^{\in}$ szintén üres lesz.

4. Alakítsuk át a most bizonyított tétel segítségével a 2. pontban elért tételt!

$$\Vdash \mathbf{h}(a^{\in} \cup b^{\in})$$

Kiolvasás: Két individuum elemeinek osztályából képzett unió halmaz.

≈ Ha a és b elemeinek osztályát egyesítjük, halmazt kapunk.

≈ Két halmaz egyesítése is halmaz. (Erről bővebben az 5. pontban! Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy megengedhető, hogy a és b itt ősob legyenek, mert $x^{\in}$ értelmezett ősobokra is ($=\varnothing$).)

5. A Tankönyv nem olvassa ki az előbbi formulát, helyette egy gyengébb megfogalmazással él: „Ez magában foglalja azt is, hogy két halmaz egyesítése is halmaz.”

a.) Ha a és b halmazok, akkor ($a^{\in} = a$) és ($b^{\in} = b$). Ezeket az azonosságokat az előbbi tételbe helyettesítve ezt kapjuk: $\mathbf{h}(a \cup b)$. Ha pedig az a-ra és b-re vonatkozó feltételt is formalizáljuk:

$$[\mathbf{h}(a)\ \&\ \mathbf{h}(b)] \supset \mathbf{h}(a \cup b)$$

Kiolvasás: Két halmaz egyesítése, úniója is halmaz.

b.) Ha a és b nem halmazok, akkor ($a^{\in} = \varnothing$) és ($b^{\in} = \varnothing$). A 4. pontban szereplő ($a^{\in} \cup b^{\in}$) ekkor ezt az alakot ölti: ($\varnothing \cup \varnothing$). Viszont **(H3)**-ból már levezettük, hogy $\mathbf{h}(\varnothing)$, ezért $\mathbf{h}(a^{\in} \cup b^{\in})$ ebben az esetben is *halmazok* uniójáról mondja, hogy halmaz.

c.) Vajon miért teszi a Tankönyv mégis pusztán azt a gyenge állítást, hogy *„magában foglalja”*? Miért nem olvassa ki a tételt a fent megadott módon? Minden bizonnyal azért, mert két üres osztály unióját még nem foghatja fel két *halmaz* uniójának, mivel $\mathbf{h}(\varnothing)$-t még nem vezette le. Ezért a *Tankönyv* gondolatmenetének ezen a pontján $\mathbf{h}(a^{\in} \cup b^{\in})$ valami mást is tartalmaz, mint azt, hogy „két halmaz egyesítése is halmaz.” Hogy mi ez a más, arról nem beszélhet, mégpedig azért, különben már itt előállna a $\mathbf{h}(\varnothing)$ tétel. Hiszen: A 4. pont bizonyította, hogy $\mathbf{h}(a^{\in} \cup b^{\in})$. Ősobok esetén az unió tagjai üres osztályok, vagyis a tétel így alakul: $\mathbf{h}(\varnothing \cup \varnothing)$, ami egyenértékű ezzel: $\mathbf{h}(\varnothing)$. Mivel a Tankönyv a halmazelmélet nem akarja az ősobokra építeni, nem akarja ezt a bizonyítást adni a $\mathbf{h}(\varnothing)$ tételhez, ezért fogalmaz óvatosan $\mathbf{h}(a^{\in} \cup b^{\in})$-vel kapcsolatban.

6. Az eddigiekből könnyen beláthatunk egy további tételt:

$$\Vdash \mathbf{h}(K) \supset \mathbf{h}(K \cup \{c\})$$

Kiolvasás: Ha valami halmaz, halmaz marad akkor is, ha kibővítjük egy egyetlen elemet tartalmazó osztállyal.

Bizonyítás: $\{c\}$ egyelemű osztály, ezért **(H2)** folytán halmaz. Mivel K is halmaz, ezért két halmaz egyesítéséről van szó, ami a 4. pont szerint halmaz.

Itt Nincs jelentősége annak, hogy c ősob vagy halmaz. Mivel pedig már beláttuk, hogy az üres osztály is halmaz, vagyis individuum, c akár az üres osztály is lehet. A tétel ekkor azt mondja: Egy halmaz az üres halmazzal való egyesítés után is halmaz.

7. Az iménti tételben egy halmazból [K] egyel nagyobb elemszámú halmazt hoztunk létre. Az eljárás ismételhető (iterálható). Legyen az így létrejött halmaz L! Ehhez a 6. pont mechanizmusával újabb elemet adhatunk úgy, hogy a halmaz mivolt megőrződjön. Az így létrejött halmaz legyen M! És így tovább. Ha kiindulópontul nem egy tetszőleges K halmazt választunk, hanem az $\{a\}$ halmazt, akkor az egyeleműtől indulva, azt mindig új elemmel bővítve, tetszőleges elemszámú halmazt hozhatunk létre.

Ebből a Tankönyv azon állítása is következik, hogy „bármely, elemeinek effektív felsorolásával definiált osztály halmaz" (152. oldal), vagyis a következő osztályok mind halmazok: $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$ … $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$

(H2) még csak annyit mondott, hogy a *legfeljebb* kételemű osztályok halmazok. Úgy tűnhet, most a „legfeljebb" kitételt helyeztük csak hatályon kívül, ez azonban nem így van. Nem azt bizonyítottuk, hogy minden osztály halmaz, amelynek egynél több eleme van, mert a { } jelentésére támaszkodva az *elemek fölsorolását* is feltételül szabtuk.

→» Miért írja a Tankönyv, hogy ez a következmény „(H2)-ből (…) adódik"?

→» Igaz-e, egyetlen ősob segítségével végtelen sok halmaz képezhető? Ha igen, hogyan, ha nem, miért?

VI. Zermelo posztulátuma

(Z)

$$\underline{\mathbf{h}}(\boldsymbol{a}^{\in} \cap \boldsymbol{K})$$

A. A kiolvasás nehézségei

A Tankönyv a posztulátumot így olvassa ki: *„Halmaz és osztály metszete mindig halmaz.”* ≈ *„Egy halmaz adott tulajdonságú elemeinek összessége is halmaz.”*

Indokolt-e $a^{\in}$ kiolvasására a *„halmaz*” szót használni?

- ha $\mathbf{h}(a)$, akkor $\mathbf{h}(a^{\in})$, hiszen korábban már beláttuk: $\mathbf{h}(a) \equiv (a^{\in} = a)$
- ha $\sim\mathbf{h}(a)$, akkor $a^{\in} = \varnothing$. Egyelőre azonban nem tudtuk bizonyítani, hogy $\mathbf{h}(\varnothing)$.

Ezért ha megengedünk ősobokat, a posztulátumot nem minden további nélkül olvashatjuk ki a fenti alakban. Amíg a $\mathbf{h}(\varnothing)$ tétel nem áll a rendelkezésünkre, a Tankönyv kiolvasása éppúgy túl szűk, mint a **(H3)**-hoz rendelt értelmező szövege volt. Ősobjektumokat is megengedve a szöveg és a formula *nem teljesen ugyanazt mondja*. A szövegnek megfelelő formula inkább ez lehetne: $\mathbf{h}(a) \supset \mathbf{h}(a^{\in} \cap K)$. A formulának megfelelő szöveget illetően két lehetőségünk is van: vagy máshogy olvassuk ki a posztulátumot, vagy elhalasztjuk a kiolvasást addig, míg le nem vezettük, hogy az üres osztály halmaz. (Úgy tűnik, Zermelo posztulátuma kiolvasásakor a Tankönyv szerzője figyelmen kívül hagyta, hogy rendszerében a változók ősobjektumokat is jelentetnek, és a korábban alkalmazott óvatos szövegezés helyett olyan kiolvasást adott, amely, mint hamarosa kiderül, helyes, de ez tárgyalásának adott pontján ez még nem belátható.)

B. Levezetett tételek

1. A következő levezetéshez először ezt kell belátni: $(K \subseteq a^{\in}) \;\Rightarrow\; [(a^{\in} \cap K) = K]$

   Kiolvasás: Ha K osztály része egy halmaznak, akkor K osztálynak ezzel a halmazzal alkotott metszete maga K. (Jelen esetben halmaz helyett osztályt is mondhattunk volna.)

   Bizonyításként idézzük fel a definíciókat:

   $(K \subseteq a^{\in}) \;\Leftrightarrow_{\mathrm{df}}\; \forall x[(x \in K) \supset (x \in a^{\in})]$

   $(a^{\in} \cap K) \;=_{\mathrm{df}}\; \{x\colon\; (x \in K) \;\&\; (x \in a^{\in})\}$

   Az, hogy K része $a^{\in}$-nak, azt jelenti, hogy minden dolog, ami eleme a K-nak, egyben eleme $a^{\in}$-nak is. A két osztály metszete viszont éppen azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek elemei K-nak és egyben elemei $a^{\in}$-nak is. Ha K minden eleme benne van $a^{\in}$-ban, akkor a kettőjük közös elemei megegyeznek K elemeivel. K-nak $a^{\in}$-n kívül nincsen eleme, mert minden eleme benne van $a^{\in}$-ban, továbbá a metszetben sincsen több elem, mint amennyi eleme K-nak van, hiszen a metszet a közös elemeket tartalmazza.

2. Alakítsuk az egypremisszás következtetést logikai igazsággá! (Vö.: Tankönyv 64. oldal)
$\Rightarrow (K \subseteq a^{\in}) \supset [(a^{\in} \cap K) = K]$

3. Mivel **(Z)** szerint $(a^{\in} \cap K)$ halmaz, a kondicionális utótagja egy halmazt azonosít egy osztállyal.
(D6) viszont kimondja: $\mathbf{h}(K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a(a = K)$. Ezt, mivel itt **(D3)** értelmében a halmaz (ősobok nem azonosíthatók osztályokkal), jobbról balra így olvashatjuk: Amelyik osztály azonos egy halmazzal, az halmaz. *Tehát*:

$$\Vdash (K \subseteq a^{\in}) \supset \mathbf{h}(K)$$

Kiolvasás: Ha egy osztály része egy halmaznak, akkor halmaz.

Megjegyzés: $a^{\in}$ csak akkor *olvasható* halmaznak, ha kikötjük, hogy $\mathbf{h}(a)$, vagy ha már tudjuk, hogy $\mathbf{h}(\varnothing)$. Különben (ősobokat feltételezve) a tétel éppen $\mathbf{h}(\varnothing)$-t állítaná, mert az ősob elemeinek osztálya üres, és ennek csak az üres osztály lehet a része, és az valóban része is.

Tételünket kontraponálva ez adódik:

$$\sim\mathbf{h}(K) \supset \sim(K \subseteq a^{\in})$$

Kiolvasás: Valódi osztály nem lehet része egy halmaznak.

→» Miért nem szabad a tételt úgy kiolvasni, hogy *az ősobok nem részei a halmazoknak.*

4. A levezetés folytatásához először ezt kell belátni: $(a^{\in} - K) \subseteq a^{\in}$

Kiolvasás: Ha egy osztályból (halmazból) bizonyos tulajdonságú elemeket [K] elveszünk, a maradék része a kiinduló osztálynak (halmaznak).

Bizonyításként alkalmazzuk két osztály különbségének definícióját:

$(a^{\in} - K) =_{\mathrm{df}} \{x\colon\ (x \in a^{\in})\ \&\ (x \notin K)\}$

A két osztály különbsége olyan osztály, amelyben csak olyan x-ek vannak, amelyek elemei $a^{\in}$-nak. Ezért a különbségosztály része $a^{\in}$-nak.

5. Az imént a 3. pontban láttuk, hogy ami része egy halmaznak, az halmaz. Márpedig $a^{\in}$ halmaz. Így ami része $a^{\in}$-nak, az halmaz. A 4. pontban viszont azt láttuk be, hogy $(a^{\in} - K)$ része $a^{\in}$-nak. Tehát:

$$\Vdash \mathbf{h}(a^{\in} - K)$$

Kiolvasás: Egy halmazból bizonyos tulajdonságú elemeket eltávolítva, halmazt kapunk.

6. Korábban (Tankönyv 150. oldal) láttuk, hogy minden osztályokra kimondott tétel igaz a halmazokra is, mivel minden halmaz osztály.

Ezért Zermelo posztulátuma, $\mathbf{h}(a^{\in} \cap K)$ és az iménti $\mathbf{h}(a^{\in} - K)$ felírható úgy is, hogy benne az osztályok helyett halmazokat ($b^{\in}$) szerepeltetünk:

$$\mathbf{h}(a^{\in} \cap b^{\in})$$

Kiolvasás: Halmazok metszete halmaz.

$$\mathbf{h}(a^{\in} - b^{\in})$$

Kiolvasás: Halmazok különbsége halmaz.

7. Az előző tétel speciális esete: $\mathbf{h}(a^{\in} - a^{\in})$. Ha viszont egy halmazból elvesszük minden elemét, az üres osztályt kapjuk:

$$\Vdash \mathbf{h}(\varnothing)$$

→» Levezethetjük-e a $\mathbf{h}(\varnothing)$ tételt úgy is, ha a $\mathbf{h}(a^{\in} \cap K)$ posztulátumban K helyére egyszerűbben $\varnothing$-t írunk?

8. Az üres halmaz mint individuum.

Ha $\mathbf{h}(\varnothing)$, akkor ez **(D6)** szerint ez azt jelenti, hogy $\exists a(a = \varnothing)$

A továbbiakban azt az a-t, amely (terjedelmileg) azonos $\varnothing$-val, 0-nak nevezzük. Több osztályt is ismerünk már név szerint. 0 az első név szerint ismert halmazunk.

A 0-ra nem írhatunk fel explicit *definíciót*, csak használati szabályát rögzíthetjük. Egy név használati szabálya azt mondja ki, hogy hogyan foglalhatjuk bele egy összetettebb kifejezésbe, egy mondatba. Vagyis: mely predikátumokat lehet róla állítani; mely predikátumok igazak rá, melyek nem.

Ehhez mindenekelőtt $\mathbf{h}(\varnothing)$ mondat jelentését kell tisztázni.

Egyszerűbben:

$$\mathbf{h}(\varnothing) \Leftrightarrow_{\mathbf{(D6)}} \exists a(a = \varnothing)$$

Mivel $\varnothing$ osztály, és **(D3)** szerint osztállyal csak olyan individuum lehet azonos, amely halmaz, az itt szereplő *a* is halmaz. Ezt az információt beilleszthetjük a képletbe.

$$\mathbf{h}(\varnothing) \;\Leftrightarrow\; \exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ (a = \varnothing))$$

Azt viszont, hogy $(a = \varnothing)$, így fejezhetjük ki: $\sim\exists x(x \in a)$

Tehát $\mathbf{h}(\varnothing)$ jelentése: $\mathbf{h}(\varnothing) \;\Leftrightarrow\; \exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \sim\exists x(x \in a))$

Szabatosabban:

A $(a = \varnothing) \Leftrightarrow \sim\exists x(x \in a)$ lépés intuitíve világos, formálisan belátni kissé nehezebb, hiszen $\varnothing$ definíciója nem az, hogy „aminek nincsen eleme", hanem: $\{x\colon\ (x \neq x)\}$. Ugyanígy a megelőző lépéseket is előadhatjuk formailag korrektebb módon. Induljunk ki abból, hogy **(D6)** szerint $\mathbf{h}(\varnothing) \Leftrightarrow \exists a(a = \varnothing)$, és alakítsuk tovább az ekvivalencia jobb oldalát! Minden sor jobb oldalán olvasható az indoklása.

$\exists a(a = \varnothing)$	
$\exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \forall x[(x \in a) \equiv (x \in \varnothing)])$	**(D3)**
$\exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \forall x[(x \in a) \equiv (x \neq x)])$	**(D1)**
$\exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \sim\exists x\sim[(x \in a) \equiv (x \neq x)])$	$\forall \Leftrightarrow \sim\exists\sim$
$\exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \sim\exists x[[(x \in a)\ \&\ \sim(x \neq x)] \vee [\sim(x \in a)\ \&\ (x \neq x)]])$	$\sim(A \equiv B) \Leftrightarrow (A\ \&\ \sim B) \vee (\sim A\ \&\ B)$
$\exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \sim\exists x[[(x \in a)\ \&\ \mathrm{i}] \vee [\sim(x \in a)\ \&\ \mathrm{h}]])$	$\sim(x \neq x) \Leftrightarrow \mathrm{i}$; $(x \neq x) \Leftrightarrow \mathrm{h}$
$\exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \sim\exists x[(x \in a) \vee \mathrm{h}])$	$A\ \&\ \mathrm{i} \Leftrightarrow A$; $A\ \&\ \mathrm{h} \Leftrightarrow \mathrm{h}$
$\exists a(\mathbf{h}(a)\ \&\ \sim\exists x(x \in a))$	$A \vee \mathrm{h} \Leftrightarrow A$ (értéktáblázat!)

Most már megadhatjuk 0 használatának szabályát, implicit definícióját.

$$\varphi(0) \;\Leftrightarrow_{\mathrm{df}}\; \exists a[\mathbf{h}(a)\ \&\ \sim\exists x(x \in a)\ \&\ \varphi(a)]$$

Kiolvasás: Azon, hogy egy predikátum $[\varphi]$ igaz 0-ra, azt értjük, hogy van olyan halmaz, amelynek nincsenek elemei, és igaz rá ez a predikátum.

Implicit ez a definíció, mert $\varphi(0)$ definiálásán keresztül értelmezzük 0-t.

A **(H1)** azt is biztosítja, hogy csak egyetlen üres halmaz lehessen. Hiszen kimondja: $\mathbf{h}(a) \supset \mathbf{h}(b) \supset \forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)] \supset (a = b)$ Ha itt *a* és *b* egyaránt üres halmazok, akkor nincsenek elemeik, és éppen úgy, mintha ősobok lennének, egybeesnek.

→» Mi a hasonlóság, és mi a különbség egy ősob és az üres halmaz között?

9. További valódi osztályok

Tétel: $\mathbf{Ru} \subseteq \mathbf{Hm} \subseteq \mathbf{Ind}$

(Figyelem! A Tankönyv 153. oldalán egy hivatkozás hibás: ~~osztályok definíciójából (lásd D1.7)~~ Helyesen: osztályok definíciójából (lásd D7).)

Bizonyításként idézzük fel a definíciókat:

$K \subseteq L \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x[(x \in K) \supset (x \in L)]$

$\mathbf{Ind} =_{\mathrm{df}} \{x\colon (x{=}x)\}$;

$\mathbf{Hm} =_{\mathrm{df}} \{x\colon \mathbf{h}(x)\}$;

$\mathbf{Ru} =_{\mathrm{df}} \{x\colon \mathbf{h}(x) \,\&\, (x \notin x)\}$

Ru $\subseteq$ **Hm** *Mert* minden, ami **Ru** eleme, bizonyos tulajdonságokkal rendelkező halmaz, **Hm** viszont a valamennyi halmazt magában foglaló osztály.

Hm $\subseteq$ **Ind** *Mert* **Hm** minden eleme halmaz, a halmazok viszont definíció szerint individuumok, ezért **Ind** részét képezik.

→» Igaz-e, hogy **Ru** $\subseteq$ **Ind,** mivel **Ru** $\subseteq$ **Hm** $\subseteq$ **Ind**? Ha igen, nem jelenti-e ez azt is, hogy **Ru** individuum, vagyis individualizálható osztály, tehát halmaz, ellentétben azzal, hogy korábban valódi osztálynak találtuk? (A válaszhoz érdemes újra elgondolkodni egy korábbi kérdésen: Mi a hasonlóság, és mi a különbség $\subseteq$ és $\in$ között?)

Tétel: ~**h**(**Hm**)

Bizonyítás: **(Z)**-ből következik, hogy $(K \subseteq a^{\in}) \supset \mathbf{h}(K)$, vagyis hogy a halmaz része is halmaz. Viszont **Ru** $\subseteq$ **Hm**. Tehát ha **Hm** halmaz, akkor a része is az. De bizonyítottuk, hogy a része, vagyis **Ru** nem halmaz. Tehát **Hm** sem az. QED

Egy másik bizonyítás: *Tegyük fel*, hogy **h**(**Hm**)! *Ha* valóban halmaz, akkor beírható $a^{\in}$ helyére a $(\mathrm{K} \subseteq a^{\in}) \supset \mathbf{h}(\mathrm{K})$ tételben. **Ru** pedig *K* helyére írható, mivel *K tetszőleges* osztály lehet. Így ez adódik: (**Ru** $\subseteq$ **Hm**) $\supset$ **h**(**Ru**)

Az imént bizonyított tétel szerint e kondicionális előtagja igaz, korábban pedig azt is beláttuk, hogy utótagja hamis, mert **Ru** valódi osztály. Ezért maga a kondicionális is hamis. Ám ez ellentmond annak, hogy egy igaz tételbe való behelyettesítéssel jött létre. Az ellentmondásért csak az lehet felelős, hogy a behelyettesítés nem volt szabályos.

Tehát **Hm** nem helyettesíthető egy halmaz helyére, vagyis ~**h**(**Hm**) QED

→» Milyen hibák vannak a következő érvelésben? **Ind** minden individuumot magában foglal. A halmazok definíció szerint olyan osztályok, amelyek individuumok, ráadásul korábban ki is mutattuk: **Hm** $\subseteq$ **Ind.** Tehát **h**(**Hm**).

→» Az előző bizonyítások analógiájára bizonyítsa, hogy **Ind** valódi osztály!

VII. Hatványosztály

$\mathbf{po}(K) =_{\mathrm{df}} \{x\colon \mathbf{h}(x) \,\&\, (x^{\in} \subseteq K)\}$

Kiolvasás: K osztály hatványosztályán azon individuumok osztályát értjük, amelyek halmazok, és elemeiknek osztálya része K-nak. ≈ K osztály hatványosztályán azon halmazok osztályát értjük, amelyek részei K-nak. ≈ K osztály hatványosztályán K részhalmazainak osztályát értjük.

Mivel $\mathbf{h}(x) \equiv (x^{\in} = x)$, ezért itt $x^{\in}$ halmazt jelent. De a tétel nem összességként ragadja meg, hanem elemein keresztül.

Az elnevezés eredete az, hogy egy n elemű osztály részeinek száma 2^n. Ha pedig ezeket a részeket úgy adjuk meg, hogy elemeiket effektíve felsoroljuk, akkor ezek a részek **(H2)** folytán halmazok. Ezért **po**(K) a K osztály 2^n számú részhalmazát foglalja magába.

Szemléltetésül tekintsük az ABC egyjegyű betűit tárgyalási univerzumnak, és képezzünk ezen az univerzumon egyre nagyobb elemszámú K osztályokat!

K	Az elemek száma	A képezhető részosztályok száma	A részosztályok/részhalmazok felsorolása
$\varnothing$	0	$2^0 = 1$	0
$\{a\}$	1	$2^1 = 2\ (= 2\times 2^0)$	0, $\{a\}$
$\{a,b\}$	2	$2^2 = 4\ (= 2\times 2^1)$	0, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$
$\{a,b,c\}$	3	$2^3 = 8\ (= 2\times 2^2)$	0, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$
$\{a,b,c,d\}$	4	$2^4 = 16\ (=2\times 2^3)$	0, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$

Egy kiragadott példa: Az $\{a\}$ osztálynak egyetlen eleme van, mégpedig a. Ennek ellenére két olyan osztály is van, amely részének tekinthető: mégpedig a 0 és önmaga. Az előbbi azért, mert a 0-nak egyáltalán nincsen eleme, tehát olyan eleme sincsen, amely $\{a\}$-nak nem eleme, márpedig: $K \subseteq L \Leftrightarrow {\sim}\exists x\,[(x \in K) \,\&\, (x \notin L)])$

Megjegyzés: A táblázatban azért 0, nem pedig $\{0\}$ szerepel, mert $\{0\}$-nak van olyan eleme (mégpedig 0), amely nem eleme $\{a\}$-nak, és ezért $\{0\}$ nem része $\{a\}$-nak. Hasonló okokból nem része $\{a\}$-nak az $\{0,a\}$ osztály sem. Ennek is van ugyanis olyan eleme (szintén a 0), ami nem eleme $\{a\}$-nak.)

A táblázat harmadik oszlopából az is kiderül, hogy ha egy osztály elemeinek számát eggyel növeljük, akkor a részosztályok száma a kétszeresére nő.

Tétel: $0 \in \mathbf{po}(K)$

Kiolvasás: Az üres halmaz minden hatványosztálynak eleme.

Bizonyítás: A 0 egy individuum, egy halmaz neve. Ezért igaz rá $\mathbf{h}(x)$, vagyis olyan x-nek bizonyul, amilyent a $\mathbf{po}(K)$ definíciójában az első konjunkciós tag megkövetel. Ezen felül 0 része minden osztálynak, mert nem igaz, hogy van olyan eleme, amely nem eleme bármely osztálynak. Mivel pedig halmazok esetében $(a^{\in} = a)$, 0 beírható a definíció második konjunkciós tagjába.

Következmény: Minden hatványosztálynak van legalább egy eleme, a 0.

$$\mathbf{po}(K) \neq \varnothing$$

Még az üres osztály hatványosztálya, $\mathbf{po}(\varnothing)$ sem üres. Egyetlen eleme a 0.

$$\mathbf{po}(\varnothing) = \{0\}$$

Bizonyítás: $\mathbf{po}(\varnothing) =_{\mathrm{df}} \{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ (x^{\in} \subseteq \varnothing)\}$

A 0 az üres halmaz neve, tehát $\mathbf{h}(0)$; továbbá mivel $(0^{\in} = \varnothing)$ és $(\varnothing \subseteq \varnothing)$, ezért az osztályabsztrakció $x = 0$ esetére igaz. Tehát van egy olyan elem, amelyre igaz az osztályabsztrakció predikátuma [a „φ”].

Más ilyen elem azonban nincs, mert nincs még egy olyan individuum, amely halmaz, *és* elemeinek osztálya üres, vagyis elemei osztálya része $\varnothing$-nak.

Tétel: $\mathbf{h}(a) \supset [a \in \mathbf{po}(a^{\in})]$

Kiolvasás: Egy halmaz eleme *saját* hatványosztályának. (Itt figyelembe vettük, hogy $\mathbf{h}(a) \equiv (a = a^{\in})$) ≈ Egy halmaz eleme azon részei osztályának, amelyek halmazok.

Bizonyítás: Alakítsuk át a tételt! Minden sor jobb oldalán olvasható az indoklása.

$\mathbf{h}(a) \supset [a \in \mathbf{po}(a^{\in})]$	
$\mathbf{h}(a) \supset [a \in \{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ (x^{\in} \subseteq a^{\in})\}]$	$\mathbf{po}(K) =_{\mathrm{df}} \{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ (x^{\in} \subseteq K)\}$
$\mathbf{h}(a) \supset [\mathbf{h}(a)\ \&\ (a^{\in} \subseteq a^{\in})]$	(D1) $\quad a \in \{x\colon\ \varphi(x)\} \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \varphi(a)$
$\mathbf{h}(a) \supset [\mathbf{h}(a)\ \&\ \mathrm{i}]$	$K \subseteq K \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x[(x \in K) \supset (x \in K)] \Leftrightarrow \mathrm{i}$
$\mathbf{h}(a) \supset \mathbf{h}(a)$	$A\ \&\ \mathrm{i} \Leftrightarrow A$

A tétel tehát végső soron tautológiát állít.

(H4)

$$\underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{po}}(a^{\in}))$$

Kiolvasás: Egy halmaz hatványosztálya maga is halmaz.

*Hatványhalmaz*nak nevezzük egy halmaz hatványosztályát, hiszen ez **(H4)** szerint maga is halmaz.

Oldjuk fel **(H4)-**ben a **po** kódot!

$$\mathbf{h}(\{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ (x^{\in} \subseteq a^{\in})\})$$

Kiolvasás: Maga is halmaz azon halmazok osztálya, amelyek elemeinek osztálya részosztálya egy individuum elemei osztályának.

→» Eleme-e egy osztálynak saját hatványosztálya?

→» Eleme-e egy osztály saját hatványosztályának?

→» Része-e egy osztálynak saját hatványosztálya?

→» Része-e egy osztály saját hatványosztályának?

→» Azonos-e egy osztály saját hatványosztályával?

A Tankönyv három nehéz mondata

A.) „Ha kezdetben csak ősobok lennének, ezek hatványhalmazának elemei már mindenképpen halmazok lennének."

Hogyan *lehet* ősoboknak hatványhalmaza?

1. Egyetlen a ősobnak nincs hatványhalmaza, mert nem definiált **po**(a), ahol a nem osztály.

→» Mutassa ki **po**(K) definíciójából, hogy K nem lehet ősob.

2. Képezhetjük viszont az ősobok osztályát = $\{y\colon\ {\sim}\mathbf{h}(y)\}$, ennek pedig már van hatványosztálya:

$\mathbf{po}(\{y\colon\ {\sim}\mathbf{h}(y)\}) = \{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ x^{\in} \subseteq \{y\colon\ {\sim}\mathbf{h}(y)\}\}$

Alkalmazzuk a jobb oldalon a következő definíciót: $K \subseteq L \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall z[(z \in K) \supset (z \in L)]$

$\mathbf{po}(\{y\colon\ {\sim}\mathbf{h}(y)\}) = \{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ \forall z[(z \in x^{\in}) \supset [z \in \{y\colon\ {\sim}\mathbf{h}(y)]]\}$

A kondicionális utótagjában küszöböljük ki az osztályabsztrakciót **(D1)** segítségével:

$\mathbf{po}(\{y\colon\ {\sim}\mathbf{h}(y)\}) = \{x\colon\ \mathbf{h}(x)\ \&\ \forall z[(z \in x^{\in}) \supset {\sim}\mathbf{h}(z)]\}$

Kiolvasás: Az ősobok osztályának hatványosztályába olyan halmazok [x] tartoznak, amelyeknek csak ősobok [z] az elemei.

Ilyen halmaz [x] lehet például: $\{z\}$

3. Alkalmas eljárással az ősobokból halmazokat is képezhetünk. Ennek a halmaznak a hatványosztálya már a keresett hatvány*halmaz*. Ilyen eljárás lehet, hogy egyesével felsoroljuk az ősobokat, vagy egy olyan predikátumot keresünk, amely igaz néhány ősobra, és amelynek terjedelme halmaz, nem pedig valódi osztály. Az is megfelelő eljárás, ha tetszőleges ősob elemeinek az osztályát ($a^{\in} = \varnothing$) képezzük.

B.) „A hatványhalmazok föllépése tehát egy olyan nevezetes pont, ahol a halmazelmélet radikálisan eltávolodik az individuális objektumok osztályokba sorolásának »naiv« eszméjétől."

A hatványhalmaz fogalmát és a rá vonatkozó posztulátumot bevezetve már nem csak úgy nyerhetünk halmazokat, hogy *individuumok* egy osztályát képezzük, és egyszerűen halmaznak minősítünk. **(H4)**, amely végső elemzésben: $\mathbf{h}(\{x\text{:}\ \ \{\mathbf{h}(x)\ \&\ (x^{\in} \subseteq a^{\in})\}\})]$ alakot ölt, *halmazok* [Vö.:$\mathbf{h}(x)$] osztályát [Vö.: $\{x\text{:}\ldots\}$] minősít halmaznak, így már *összességek összességéről,* halmazok halmazáról beszél.

C.) „Bár halmazok halmazainak képzését már (H2) és (H3) is lehetővé teszik."

Vagyis olyan dolgok összességéről mondják, hogy azok halmazok, amelyek maguk is halmazok (lehetnek).

(H2) szerint $\mathbf{h}(\{a,b\})$

Itt a és b szerepében szerepelhetnek halmazok is. Ezért $\{a,b\}$ akár halmazok halmaza is lehet.

(H3) szerint $\mathbf{h}(\cup(a^{\in})) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{h}[\{x\text{:}\ \exists y[(x \in y)\ \&\ (y \in a^{\in})]\}]$

(H3) tehát az osztályabsztrakcióban megadott tulajdonsággal bíró x-ek osztályát minősíti halmaznak. Ha ezek az x-ek maguk is halmazok, aminek nincsen akadálya [egyetlen feltétel, hogy $\exists z(z \in x)$ teljesüljön], akkor **(H3)** halmazok [x] halmazának képzését engedi meg.

→» Igaz-e, hogy **po**(K) elemei részei K-nak?

→» Igaz-e, hogy **po**(**Hm**) úgy is kiolvasható, hogy *halmazok halmazainak az osztálya*?

→» Fennáll-e a következő azonosság? **po**(**Ind**) = **Hm**

→» Tételezzük fel, hogy létrehoztuk az összes halmazt, ami egy (nemüres) tárgyalási univerzum elemeiből képezhető! Igaz-e, hogy ekkor ∪(**Hm**) osztály a tárgyalási univerzum összes individuumát magában foglalja? Ha igen, igaz-e az is, hogy ∪(**Hm**) azonos terjedelmű a tárgyalási univerzummal?

VIII. Regularitás

Kezdjük egy új posztulátummal, a regularitás vagy jólfundáltság posztulátumával!

(H5)

$$(a^{\in} \neq \varnothing) \supset \exists x[(x \in a^{\in}) \;\&\; (x^{\in} \cap a^{\in} = \varnothing)]$$

Kiolvasás: Ha egy halmaz nem üres, akkor van olyan eleme, amelynek az elemeit tartalmazó osztállyal képzet metszete üres. ≈ Nemüres halmaznak mindig van olyan eleme, amellyel már nincs közös eleme.

A kiolvasásnál figyelembe vettük, hogy mivel $a^{\in} \neq \varnothing$, a posztulátumban szereplő a mindenképpen halmaz, nem pedig ősob, hiszen $\sim\mathbf{h}(a) \supset (a^{\in} = \varnothing)$.

A.

Ha az a halmaz elemei között szerepel legalább egy b ősob, vagyis ha $\exists b[(b \in a) \;\&\; \sim\mathbf{h}(b)]$, akkor **(H5)** triviálisan igaz (vagyis nem kell posztulálni), hiszen a halmaznak és b ősobnak **(H5)** posztulátumtól függetlenül sem lesz közös eleme, mivel az ősoboknak egyáltalán nincsen elemük.

Ebben az esetben **(H5)** így egyszerűsíthető (jobb oldalon a bal oldal magyarázata):

$(b \in a) \supset [(b \in a^{\in}) \;\&\; (b^{\in} \cap a^{\in} = \varnothing)]$	$(b \in a) \supset (a^{\in} \neq \varnothing)$
$(b \in a) \supset [(b \in a^{\in}) \;\&\; (b^{\in} \cap a^{\in} = \varnothing)]$	$(b \in a) \supset (a^{\in} \neq \varnothing)$
$(b \in a) \supset [(b \in a^{\in}) \;\&\; (\varnothing \cap a^{\in} = \varnothing)]$	$b^{\in} = \varnothing$
$(b \in a) \supset [(b \in a^{\in}) \;\&\; (\varnothing = \varnothing)]$	$\varnothing \cap a^{\in} = \varnothing$
$(b \in a) \supset [(b \in a^{\in}) \;\&\; \mathrm{i}]$	$\varnothing = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{i}$
$(b \in a) \supset (b \in a^{\in})$	$p \;\&\; \mathrm{i} \Leftrightarrow p$
$(b \in a) \supset (b \in a)$	$\mathbf{h}(a) \supset a^{\in} = a$

Ez pedig valóban tautológia, logikai igazság, amelyre nem kell posztulátumból következtetni. Sőt alulról felfelé haladva, az egymásra következő lépések **(H5)** speciális esetének levezetéseként olvashatók.

B.

Ha a minden eleme halmaz, vagyis ha $\sim\exists b[(b \in a) \;\&\; \sim\mathbf{h}(b)]$, akkor **(H5)** már nem levezethető. Ellenkezőleg: olyan halmazok esetén, amelyeknek minden eleme halmaz, **(H5)** posztulátumból olyan információk nyerhetők, amelyek máshonnan nem.

1. *Tegyük fel*, hogy egy $\{a,b\}$ halmaz elemei között az alábbi viszony áll fenn!

$a \in b$ és $b \in a$

Itt **(H0)** értelmében a és b egyaránt halmaz, mivel mindkettőnek van eleme.

b, illetve a így is megnevezhető:

$b = \{a,b\} \cap b$

$a = \{a,b\} \cap a$

→» Bizonyítsa e tételeket. Segítségül tekintse át újra a Halmazelmélet VI./B./1. pontjában mondottakat!

Ezért az a és b halmazok között feltételezett viszonyt így is felírhatjuk:

$a \in (\{a,b\} \cap b)$ ÉS $b \in (\{a,b\} \cap a)$

(Figyelem! A Tankönyvben a (6) sor bal és jobb oldala az alatta levő képlet jobb és bal oldalának felel meg. Az oldalak tehát a második sorban fel vannak cserélve. Ebben a sorban szerencsés volna az „∈” második argumentumát zárójelbe tenni.)

Ezekben a képletekben szerepel az $\{a,b\}$ halmaz. Mivel ez a halmaz elemeinek felsorolásával definiált, biztos, hogy egyaránt eleme a is és b is.

Csakhogy:

- Az ÉS bal oldalán azt látjuk, hogy az a nemcsak $\{a,b\}$ halmaznak eleme, hanem b-nek is. Tehát a közös eleme $\{a,b\}$-nek és b-nek.
- Az ÉS jobb oldalán azt látjuk, hogy a b nemcsak $\{a,b\}$ halmaznak eleme, hanem a-nek is. Tehát b közös eleme $\{a,b\}$-nek és a-nak.

Tehát $\{a,b\}$-nek két eleme van, a és b, és mindkét elemével van közös eleme: b illetve a. Ezt azonban **(H5)** kizárja.

→» Magyarázza el, miért zárja ki!

Nem tartható tehát a feltevésünk, amely szerint $(a \in b)$ *és* $(b \in a)$. Vagyis kizárólag vagy $(a \in b)$, vagy $(b \in a)$ állhat csak fenn. (kizáró értelmű vagy!)

$$(a \in b) \supset (b \notin a)$$

Kiolvasás: Két halmaz nem lehet kölcsönösen eleme egymásnak.

Mivel a tétel oldalai nem cserélhetők fel, a $\supset$ sem cserélhető $\equiv$ -ra.

Eredményünket így is összegezhetjük: A $\in$ jel aszimmetrikus. (Egy R reláció aszimmetrikus, ha $\forall x \forall y(Rxy \supset \sim Ryx)$.)

2.

Helyettesítsünk b helyére a-t!

$$(a \in a) \supset (a \notin a)$$

Ebből a **PC** szerint $(a \notin a)$ következik.

Bizonyítás. Ha ez a kondicionális igaz, akkor lehetetlen, hogy az előtagja igaz legyen. Hiszen akkor egy (i ⊃ h) kondicionális volna igaz.

Ha az *előtag hamis*, akkor a kondicionális igazságának megtartása mellett az utótag elvileg egyaránt lehet igaz és hamis.

- Tegyük fel, hogy hamis. Ekkor negáltja, $(a \in a)$, igaz. De ezt mint előtagot hamisnak vettük. Tehát az utótag nem lehet hamis.
- Tehát a kondicionális a **PC** szerint csak akkor lehet igaz, ha utótagja, (a ∉ a) igaz (és előtagja hamis).

→» Bizonyítsa a tételt analitikus táblázattal! (Segítség: $(a \in a)$ helyére írjon p-t!)

Eredményünket így is összegezhetjük: A ∈ jel irreflexív. (Egy R reláció irreflexív, ha $\forall x{\sim}(xRx)$.)

Az $(a \notin a)$ tétel igaz az ősobjektumokra is, de azokra definíciójuk ~**h**(a) és **(H0)** alapján. **(H0)** ugyanis kontraponálva azt mondja, hogy ami nem halmaz, annak nincs eleme, így az ősobok nem lehetnek önmaguk elemei. **(H5)** most a halmazokra is kijelenti ezt a tételt.

Tehát a tétel *minden individuumra* igaz.

→» Igaz-e az (a∉a) tétel osztályokra is?

→» Lehetséges-e, hogy $(z \in y)$ és $(y \in x)$ és $(z \in x)$?

→» Igaz-e, hogy $a \in (a \cup b)$, feltéve, hogy $a \notin$ y?

→» Idézze fel **Ru** és **Hm** definícióját, és eredményeink alapján döntse el, hogy igaz-e **Ru** ⊆ **Hm** mellett az is, hogy **Ru** = **Hm**!

IX. Posztulátumok, definíciók és a legfontosabb tételek

Posztulátumok

(H0) $\exists x(x \in a) \supset \mathbf{h}(a)$

(H1) $\mathbf{h}(a) \supset \mathbf{h}(b) \supset \forall x[(x \in a) \equiv (x \in b)] \supset (a = b)$

(H2) $\mathbf{h}(\{a,b\})$

(H3) $\mathbf{h}(\cup(a^{\in}))$

(H4) $\mathbf{h}(\mathbf{po}(a^{\in}))$

(H5) $(a^{\in} \neq \varnothing) \supset \exists x[(x \in a^{\in}) \ \& \ (x^{\in} \cap a^{\in} = \varnothing)]$

(Z) $\mathbf{h}(a^{\in} \cap K)$

Definíciók

(D1) $a \in \{x\colon \ \varphi(x)\} \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \varphi(a)$

(D2) $(K = L) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x[(x \in K) \equiv (x \in L)]$

(D3) $(a = K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \mathbf{h}(a) \ \& \ \forall x[(x \in a) \equiv (x \in K)]$

(D4) $(K \in b) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a[(a = K) \ \& \ (a \in b)]$

(D5) $(K \in L) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a[(a = K) \ \& \ (a \in L)]$

(D6) $\mathbf{h}(K) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a(a = K)$

(D7) $\mathbf{Ind} =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ (x = x)\}$

$\mathbf{Hm} =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ \mathbf{h}(x)\}$

$\mathbf{Ru} =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ \mathbf{h}(x) \ \& \ (x \notin x)\}$

$\varnothing =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ (x \neq x)\}$

$K \cup L =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ (x \in K) \vee (x \in L)\}$

$K - L =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ (x \in K) \ \& \ (x \notin L)\}$

$K \cap L =_{\mathrm{df}} \{x\colon (x \in K) \ \& \ (x \in L)\}$

$\cup(K) =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ \exists y[(x \in y) \ \& \ (y \in K)]\}$

$\cap(K) =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ \forall y[(y \in K) \supset (x \in y)] \ \& \ \exists y(y \in K)\}$

$K \subseteq L \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x[(x \in K) \supset (x \in L)]$

$K \subset L \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} K \subseteq L \ \& \ (K \neq L)$

$a^{\in} =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ (x \in a)\}$

$\mathbf{po}(K) =_{\mathrm{df}} \{x\colon \ \mathbf{h}(x) \ \& \ (x^{\in} \subseteq K)\}$

$\varphi(0) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a[\mathbf{h}(a) \ \& \ {\sim}\exists x(x \in a) \ \& \ \varphi(a)]$

Tételek

$\mathbf{h}(a) \equiv (a = a^{\in})$

$\cup(\varnothing) = \varnothing$

$\cap(\varnothing) = \varnothing$

$\mathbf{h}(\varnothing)$

$\mathbf{h}(\cup(\varnothing))$

$\varnothing^{\in} = \varnothing$

$\mathbf{h}(\{a\})$

$\mathbf{h}(\cup(\{a,b\}))$

$\cup(\{a,b\}) = a^{\in} \cup b^{\in}$

$\mathbf{h}(a^{\in} \cup b^{\in})$

$[\mathbf{h}(a) \ \& \ \mathbf{h}(b)] \supset \mathbf{h}(a \cup b)$

$\mathbf{h}(K) \supset \mathbf{h}(K \cup \{c\})$

$(K \subseteq a^{\in}) \Rightarrow [(a^{\in} \cap K) = K]$

$(K \subseteq a^{\in}) \supset \mathbf{h}(K)$

$(a^{\in} - K) \subseteq a^{\in}$

$\mathbf{h}(a^{\in} - K)$

$\mathbf{h}(a^{\in} \cap b^{\in})$

$\mathbf{h}(a^{\in} - b^{\in})$

${\sim}\mathbf{h}(a) \supset (a \neq K)$

$\mathbf{h}(\varnothing) \Leftrightarrow \exists a[\mathbf{h}(a) \ \& \ {\sim}\exists x(x \in a)]$

${\sim}\mathbf{h}(\mathbf{Hm})$

${\sim}\mathbf{h}(\mathbf{Ind})$

${\sim}\mathbf{h}(\mathbf{Ru})$

$\mathbf{Ru} \subseteq \mathbf{Hm} \subseteq \mathbf{Ind}$

$\mathbf{Ru} = \mathbf{Hm}$

$0 \in \mathbf{po}(K)$

$\mathbf{po}(K) \neq \varnothing$

$\mathbf{po}(\varnothing) = \{0\}$

$\mathbf{h}(a) \supset [a \in \mathbf{po}(a^{\in})]$

$a = \{a,b\} \cap a$

$(a \in b) \supset (b \notin a)$

$a \notin a$

$\mathbf{h}(a) \supset (a \subseteq a)$

7. Ajánlott irodalom

Kneale, W. – M. Kneale: *A logika fejlődése*. Budapest, Gondolat, 1987.

Krajewski, S.: A Gödel-tétel filozófiai következményei. In *Tertium non datur. Logikai-metodológiai tanulmányok* 2. 1985. 231-237.

Madarászné Zs. A. – Pólos L. – Ruzsa I..: *A logika elemei*. Budapest, Osiris, 2006.

Margitay T.: *Az érvelés mestersége*. Budapest, Typotex, 2004.

Nagel, E. – J. R. Newman: A Gödel-bizonyítás. In I. M. Copi – J. A. Gould *Kortárs tanulmányok a logikaelmélet kérdéseiről*. Budapest, Gondolat, 1985. 70-103.

Russell, B.: *Filozófiai fejlődésem*. Budapest, Gondolat, 1968.

Ruzsa I. – Máté A.: *Bevezetés a modern logikába*. Budapest, Osiris, 1997.

Ruzsa I. [Szerk.]: *Logikai zsebenciklopédia*. Budapest, Áron, 1998.

Ruzsa I.: *Bevezetés a modern logikába*. Budapest, Osiris, 2000. In

Ruzsa I.: Logikai szintaxis és szemantika. I-II. Budapest, Akadémia, 1988-89.

Smullyan, R. M.: *Gödel nemteljességi tételei*. Budapest, Typotex, 1999.

Tarski, A.: Igazság és bizonyítás. In A. Tarski: *Bizonyítás és igazság*. Budapest, Gondolat, 1990. 365-390.